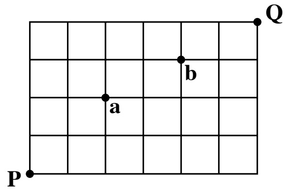
補充問題 2 ● 最短経路の応用 ●

右図に示すように，碁盤目状の道路と **4** 地点 **P**, **Q**, **a**, **b** があり，最短経路を通って **P** 地点から **Q** 地点に向かうものとする。このとき，次の各最短経路の通り数を求めよ。



(i)**P** から **Q** に向かう最短経路の総数

(ii)**P** から **a** を通って **Q** に向かう最短経路の数

(iii)**P** から **a** と **b** の両方を通って **Q** に向かう最短経路の数

(iv)**P** から **a** を通るが，**b** は通らずに **Q** に向かう最短経路の数

ヒント！ **a** を通る場合の事象を A, **b** を通る場合の事象を B とおいて求めていこう！

解答＆解説

(i)**P**→**Q** の全最短経路数 $n(U)$ は，たて，横 **10** 区間の内，横に行く (→) **6** 区間を選び出す場合の数に等しいので，

$$n(U) = {}_{10}C_6 = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{10\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 210\text{通り} \quad\cdots\cdots(\text{答})$$

ここで，「事象 A：点 **a** を通る」，「事象 B：点 **b** を通る」とおくと，

(ii)$\mathbf{P} \xrightarrow{{}_4C_2} \mathbf{a} \xrightarrow{{}_6C_4} \mathbf{Q}$ より，求める最短経路数 $n(A)$ は，

$$n(A) = {}_4C_2 \times {}_6C_4 = \frac{\cancel{4!}}{2!\times 2!} \times \frac{6!}{\cancel{4!}\times 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot 3}{\cancel{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}} = 90\text{ 通り} \quad\cdots\cdots(\text{答})$$

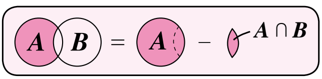
たて，横 **4** 区間から (→) の **2** 区間を選ぶ

たて，横 **6** 区間から (→) の **4** 区間を選ぶ

(iii)$\mathbf{P} \xrightarrow{{}_4C_2} \mathbf{a} \xrightarrow{{}_3C_2} \mathbf{b} \xrightarrow{{}_3C_2} \mathbf{Q}$ より，求める最短経路数 $n(A\cap B)$ は，

$$n(A\cap B) = {}_4C_2\times{}_3C_2\times{}_3C_2 = \frac{4!}{2!\times 2!}\times 3\times 3$$
$$= \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times 3\times 3 = 6\times 9$$
$$= 54\text{ 通り} \quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(iv) 求める通り数は，$n(A\cap\overline{B})$ より，→



$$n(A\cap\overline{B}) = n(A) - n(A\cap B) = 90 - 54 = 36\text{ 通り} \quad\cdots\cdots(\text{答})$$