補充問題 2　● 因数分解と式の値 ●

(1) α^3+1 を因数分解せよ。

(2) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=1$ のとき，次の各式の値を求めよ。

(i) α^3　　(ii) $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$　　(iii) $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$　　(奈良大 ＊)

ヒント！ (1) では，公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を利用し，(2) の (i) では (1) の結果をうまく利用することがポイントなんだね。

解答＆解説

(1) $\alpha^3+1=\alpha^3+1^3=(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha\cdot1+1^2)$ ← 公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\therefore\ \alpha^3+1=(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)$ ……① となる。 ……………………(答)

(2) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=1$ ……② のとき，②の両辺に α をかけて，

(i) $\alpha^2+1=\alpha$ より，$\alpha^2-\alpha+1=0$ ……②′ となる。

②′を①に代入して，

$$\alpha^3+1=(\alpha+1)\underbrace{(\alpha^2-\alpha+1)}_{0\ (②'より)}=(\alpha+1)\times0=0$$

$\therefore\ \alpha^3=-1$ である。 ……………………………………………(答)

(ii) ②の両辺を 2 乗して，$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=1^2$ より，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}+2=1$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+2\cdot\cancel{\alpha}\cdot\frac{1}{\cancel{\alpha}}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+2$$

$\therefore\ \alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=1-2$ より，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=-1$ である。 ……………(答)

(iii) ②の両辺を 3 乗して，

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^3=1^3$　　$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}+3=1$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3=\alpha^3+3\cdot\alpha^2\cdot\frac{1}{\alpha}+3\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+3\underbrace{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)}_{1\ (②より)}=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+3$$

$\therefore\ \alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=1-3=-2$ ……………………………………(答)