補充問題 2	●平面と直線の交点●

xyz 座標空間内に，点 $\mathbf{A}(3,\ 1,\ 2)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(2,\ -1,\ 3)$ の直線 L と，点 $\mathbf{B}(1,\ 2,\ -1)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=(3,\ -1,\ 2)$ の平面 α がある。

(1) 直線 L と平面 α の方程式を求めよ。

(2) 直線 L と平面 α の交点を $\mathbf{P}$ とおく。交点 $\mathbf{P}$ の座標を求めよ。

ヒント！ **(1)** 空間図形の直線と平面の公式を使って求めればいい。**(2)** では，直線 L の方程式の $x,\ y,\ z$ を媒介変数 t で表すことがポイントだね。

解答＆解説

・点 $\mathbf{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(l,\ m,\ n)$ の直線の方程式：
$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$

・点 $\mathbf{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ の平面の方程式：
$a(x-x_2)+b(y-y_2)+c(z-z_2)=0$

(1) ・点 $\mathbf{A}(3,\ 1,\ 2)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(2,\ -1,\ 3)$ の直線 L の方程式は，

$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ ……① である。

・点 $\mathbf{B}(1,\ 2,\ -1)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=(3,\ -1,\ 2)$ の平面 α の方程式は，

$3\cdot(x-1)-1\cdot(y-2)+2\cdot(\underbrace{z+1}_{z-(-1)})=0$ より，$3x-y+2z+1=0$ …②

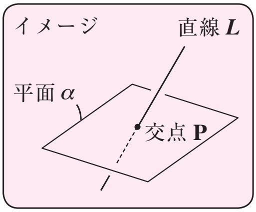
である。……(答)

(2) ①$=t$（媒介変数）とおくと，← これがポイント

$\dfrac{x-3}{2}=t$ より，$x=2t+3$ ………③

$\dfrac{y-1}{-1}=t$ より，$y=-t+1$ ………④

$\dfrac{z-2}{3}=t$ より，$z=3t+2$ ………⑤ となる。



③，④，⑤を②に代入すると，$3\cdot(\underbrace{2t+3}_{x})-1\cdot(\underbrace{-t+1}_{y})+2\cdot(\underbrace{3t+2}_{z})+1=0$

$6t+9+t-\cancel{1}+6t+4+\cancel{1}=0,\ 13t+13=0,\ 13t=-13\quad \therefore t=-1$ …⑥

⑥を③，④，⑤に代入して，

$x=2\times(-1)+3=1,\ y=-(-1)+1=2,\ z=3\times(-1)+2=-1$ となる。

$\therefore$ 直線 L と平面 α の交点 $\mathbf{P}$ の座標は，$\mathbf{P}(1,\ 2,\ -1)$ である。………(答)