◆◆◆ Appendix(付録) ◆◆◆

補充問題 1 変数変換後の確率密度 CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

確率変数 X が，確率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}(1-x^2) & (-1\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (x<-1,\ 1<x)\end{cases}$ で与えられる確率分布に従うものとする。ここで，$Y=\sin^{-1}X$ によって新たな確率変数 Y を定義するとき，Y の確率密度 $f_Y(y)$ を求めよ。

ヒント！ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_Y(y)dy=\int_{-1}^{1} f_X(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_X(\sin y)\frac{dx}{dy}dy$ を利用して，$f_Y(y)$ を求めよう。

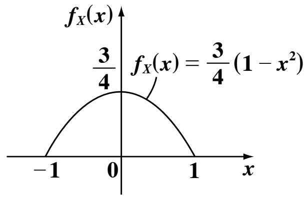
解答＆解説

$f_X(x)=\dfrac{3}{4}(1-x^2)\ \ (-1\leqq x\leqq 1)$ について，

$y=\sin^{-1}x$ とおくと，$x=\sin y$ ……① より，

$x:-1\to 1$ のとき，$y:-\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{\pi}{2}$ となる。

また，①より，$\dfrac{dx}{dy}=\cos y$ ……② となる。

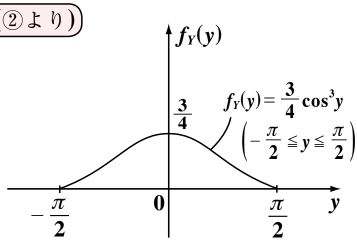


$\left(\displaystyle\int_{-1}^{1} f_X(x)dx=1\ (全確率)\right)$

以上より，新たに定義された確率変数 Y の確率密度を $f_Y(y)$ とおくと，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_Y(y)dy=\int_{-1}^{1} f_X(\underbrace{x}_{\sin y\ (①より)})dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{f_X(\sin y)}_{\frac{3}{4}(1-\sin^2 y)=\frac{3}{4}\cos^2 y}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{\cos y\ (②より)}dy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}\cos^3 y\,dy \text{ となる。}$$



よって，求める確率密度 $f_Y(y)$ は，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\cos^3 y & \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 0 & \left(y<-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}<y\right)\end{cases}\quad\text{……(答)}$$

$f_Y(-y)=f_Y(y)$ より，$f_Y(y)$ は偶関数であり，$f(0)=\dfrac{3}{4}$，$f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ となる。