演習問題 8　●2 階オイラーの方程式の応用●

2 階線形微分方程式：$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = x^3\cos x$ …①

の一般解を求めよ。

ヒント！ ①の同伴方程式が，2 階オイラーの方程式になっていることに気付けば，話は早いと思うよ。

解答＆解説

①の同伴方程式は，$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = 0$ …②より，両辺に x^2 をかけて

$x^2y'' \underbrace{-6}_{a}xy' + \underbrace{12}_{b}y = 0$　となる。これは 2 階オイラーの方程式である。

よって，この特性方程式：$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ ← $\boxed{\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0 \quad (a = -6,\ b = 12)}$

を解いて，$(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$　　$\therefore \lambda = 3,\ 4$

これから②の基本解は，$y_1 = x^3$，$y_2 = x^4$

∴②の一般解 (①の余関数) は，$C_1x^3 + C_2x^4$ である。

ここで，y_1 と y_2 のロンスキアン $W(y_1,\ y_2)$ は，

$$W(y_1,\ y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = 4x^6 - 3x^6 = x^6$$

よって，①の特殊解 y_0 は，

$$y_0 = -x^3\int \frac{x^4 \cdot x^3\cos x}{x^6}\,dx + x^4\int \frac{x^3 \cdot x^3\cos x}{x^6}\,dx$$

$y'' + Py' + Qy = 0$ の基本解が y_1, y_2 のとき，$y'' + Py' + Qy = R$ の特殊解 y_0 は，

$$y_0 = -y_1\int \frac{y_2 \cdot R}{W}\,dx + y_2\int \frac{y_1 \cdot R}{W}\,dx$$

$$= -x^3\underbrace{\int x \cdot \cos x\,dx}_{\int x\cdot(\sin x)'dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x} + x^4\underbrace{\int \cos x\,dx}_{\sin x}$$

$$= -x^3(\cancel{x\sin x} + \cos x) + \cancel{x^4\sin x} = -x^3\cos x$$　となる。

∴求める①の一般解は，$y = \underbrace{-x^3\cos x}_{\text{特殊解}} + \underbrace{C_1x^3 + C_2x^4}_{\text{余関数}}$　である。