補充問題 1　● 同次形微分方程式 ●

微分方程式 $y' = \dfrac{\sqrt{4x^2 - y^2} + y}{x}$ ……① $(1 \leqq x,\ 0 < y < 2x)$ について，

$y(1) = 1$ をみたす特殊解を求めよ。$\left(\right.$ただし，積分定数C は$0 < C < \dfrac{\pi}{2}$ を

みたすものとする。$\left.\right)$

ヒント！ ①を変形すると，$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形の同次形なので，$\dfrac{y}{x} = u$ とおいて解けばいい。

解答＆解説

$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の同次形

①を変形して，$y' = \sqrt{4 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}$ ……①´ $\left(1 \leqq x,\ 0 < y < 2x\right)$

ここで，$\dfrac{y}{x} = u\ (0 < u < 2)$…② とおくと，$y = xu$ より，$y' = u + xu'$…③

となる。②，③を①´に代入して，

$\cancel{u} + xu' = \sqrt{4 - u^2} + \cancel{u}$，　$x \cdot \dfrac{du}{dx} = \sqrt{4 - u^2}$ より，

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - u^2}} du = \int \frac{1}{x} dx$$

公式：$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

$\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$

$$\sin^{-1}\frac{u}{2} = \log x + C \quad (\because x \geqq 1)$$

ここで，$u = \dfrac{y}{x}$ を代入して，$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{y}{x}\right) = \log x + C$　(C：積分定数)より，

$y = 2x \cdot \sin(\log x + C)$ ……④ となる。 ← 一般解

一般解④において，初期条件：$y(1) = 1$ をみたすものは，

$x = 1$，$y = 1$ を④に代入して，

$1 = 2 \cdot 1 \cdot \sin(\cancel{\log 1} + C)$，　$\sin C = \dfrac{1}{2}$

ここで，$0 < C < \dfrac{\pi}{2}$ より，$C = \dfrac{\pi}{6}$

これを④に代入して，求める特殊解は，

$y = 2x \cdot \sin\left(\log x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ である。……………………………………(答)