実践問題 8　● 2 階オイラーの方程式の応用 ●

2 階線形微分方程式：$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2e^{-x}$ …①

の一般解を求めよ。

ヒント！　これも，同伴方程式が 2 階オイラーの方程式になっているんだね。

解答＆解説

①の同伴方程式は，$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = \boxed{(ア)}$ …②より，両辺に x^2 をかけて

$x^2y'' \underbrace{-4}_{a}xy' + \underbrace{6}_{b}y = 0$　となる。これは 2 階オイラーの方程式である。

よって，この特性方程式：$\boxed{(イ)\qquad} = 0$ ← $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$ $(a = -4,\ b = 6)$

を解いて，$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$　$\therefore \lambda = 2,\ 3$

これから②の基本解は，$y_1 = x^2$，$y_2 = x^3$

∴②の一般解（①の余関数）は，$\boxed{(ウ)\qquad}$ である。

ここで，y_1 と y_2 のロンスキアン $W(y_1,\ y_2)$ は，

$$W(y_1,\ y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = \boxed{(エ)\qquad}$$

よって，①の特殊解 y_0 は，

$$y_0 = -x^2\int \frac{x^3 \cdot x^2e^{-x}}{x^4}dx + x^3\int \frac{x^2 \cdot x^2e^{-x}}{x^4}dx$$

$$= -x^2\int xe^{-x}dx + x^3\int e^{-x}dx$$

$$= x^2(\cancel{x}+1)e^{-x} - \cancel{x^3e^{-x}} = \boxed{(オ)\qquad}$$ となる。

∴求める①の一般解は，$y = \boxed{(オ)\qquad} + C_1x^2 + C_2x^3$ である。

解答　(ア) 0　(イ) $\lambda^2 - 5\lambda + 6$　(ウ) $C_1x^2 + C_2x^3$
(エ) $3x^4 - 2x^4 = x^4$　(オ) x^2e^{-x}