◆◆◆ Appendix(付録) ◆◆◆

補充問題 1 　数列の極限　 CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

次の各問いに答えよ。

(1) $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を n の式で表せ。

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} n \cdot S_n$ を求めよ。 (東京理科大＊)

ヒント！ (1) $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を部分分数に分解すると，$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ となるんだね。

解答＆解説

(1) $\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}=\frac{\cancel{2k}+1-(\cancel{2k}-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$ となるので，

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2k-1}}_{I_k}-\underbrace{\frac{1}{2k+1}}_{I_{k+1}}\Bigg) \quad \cdots\cdots①$$ となる。

ここで，①について，

$I_k=\frac{1}{2k-1}$ とおくと，$I_{k+1}=\frac{1}{2(k+1)-1}=\frac{1}{2k+1}$ となる。よって，

$$S_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{2n}(I_k-I_{k+1})$$

$$=\frac{1}{2}\{\underbrace{(I_n-\cancel{I_{n+1}})}_{k=n}+\underbrace{(\cancel{I_{n+1}}-\cancel{I_{n+2}})}_{k=n+1}+\underbrace{(\cancel{I_{n+2}}-\cancel{I_{n+3}})}_{k=n+2}+\cdots+\underbrace{(\cancel{I_{2n}}-I_{2n+1})}_{k=2n\text{ のとき}}\}$$

$$=\frac{1}{2}(I_n-I_{2n+1})=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(2n+1)-1}\right\}$$

$I_k=\frac{1}{2k-1}$ より，
$I_n=\frac{1}{2n-1}$，$I_{2n+1}=\frac{1}{2(2n+1)-1}$

$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n+1}\right) \quad \cdots\cdots② \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) ②より，求める極限は，

分子･分母を n で割ると

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2n-1}-\frac{n}{4n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-\frac{1}{n}}-\frac{1}{4+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$\frac{1}{n}\to 0$

……(答)