◆◆◆ Appendix(付録) ◆◆◆

補充問題 1　　二項定理の応用　　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

$(1+x)^{11}$ の二項展開を利用して，次の各式の値を求めよ。

(1) ${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + \cdots + {}_{11}C_{10} + {}_{11}C_{11}$

(2) ${}_{11}C_0 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_6 + {}_{11}C_8 + {}_{11}C_{10}$，および

${}_{11}C_1 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_5 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_{11}$

ヒント！ 練習問題 4(P17) のより実践的な問題だね。$(1+x)^{11}$ を二項定理により展開した式に $x=1$ と $x=-1$ を代入すると，話が見えてくるはずだ。頑張ろう！

解答＆解説

(1) $(1+x)^{11} = {}_{11}C_0\cdot\underbrace{1^{11}}_{1} + {}_{11}C_1\cdot\underbrace{1^{10}}_{1}\cdot x + {}_{11}C_2\cdot\underbrace{1^{9}}_{1}\cdot x^2 + {}_{11}C_3\cdot\underbrace{1^{8}}_{1}\cdot x^3 + \cdots {}_{11}C_{10}\underbrace{1^{1}}_{1}\cdot x^{10} + {}_{11}C_{11}x^{11}$ より，

${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1x + {}_{11}C_2x^2 + {}_{11}C_3x^3 + \cdots + {}_{11}C_{10}x^{10} + {}_{11}C_{11}x^{11} = (1+x)^{11}$ …① となる。

まず，①の両辺に $x=1$ を代入すると，

$2^{10}=1024$ の両辺に 2 をかけた。

$${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1\cdot\underbrace{\cancel{1}}_{1} + {}_{11}C_2\cdot\underbrace{\cancel{1^2}}_{1} + {}_{11}C_3\cdot\underbrace{\cancel{1^3}}_{1} + \cdots + {}_{11}C_{10}\cdot\underbrace{\cancel{1^{10}}}_{1} + {}_{11}C_{11}\cdot\underbrace{\cancel{1^{11}}}_{1} = \underbrace{(1+1)^{11}}_{2^{11}=2048}$$

$\therefore\ {}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5 + \cdots + {}_{11}C_{10} + {}_{11}C_{11} = 2048$ …② …(答)

(2) 次に①の両辺に $x=-1$ を代入すると，

$${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1(-1) + {}_{11}C_2\underbrace{(-1)^2}_{1} + {}_{11}C_3\underbrace{(-1)^3}_{-1} + \cdots + {}_{11}C_{10}\underbrace{(-1)^{10}}_{1} + {}_{11}C_{11}\underbrace{(-1)^{11}}_{-1} = \underbrace{(1-1)^{11}}_{0}$$

${}_{11}C_0 - {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 - {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 - {}_{11}C_5 + \cdots + {}_{11}C_{10} - {}_{11}C_{11} = 0$ ……③ となる。

②と③を列記して，

$$\begin{cases} {}_{11}C_0 + \cancel{{}_{11}C_1} + {}_{11}C_2 + \cancel{{}_{11}C_3} + {}_{11}C_4 + \cancel{{}_{11}C_5} + \cdots + {}_{11}C_{10} + \cancel{{}_{11}C_{11}} = 2048 & \cdots\cdots② \\ {}_{11}C_0 - \cancel{{}_{11}C_1} + {}_{11}C_2 - \cancel{{}_{11}C_3} + {}_{11}C_4 - \cancel{{}_{11}C_5} + \cdots + {}_{11}C_{10} - \cancel{{}_{11}C_{11}} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$$

②＋③より，$2\cdot{}_{11}C_0 + 2\cdot{}_{11}C_2 + 2\cdot{}_{11}C_4 + \cdots + 2\cdot{}_{11}C_{10} = 2048$ となる。

よって，この両辺を 2 で割って，

${}_{11}C_0 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_6 + {}_{11}C_8 + {}_{11}C_{10} = 1024$ ……④ ……………………………(答)

次に③より，$\underbrace{{}_{11}C_0 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_4 + \cdots + {}_{11}C_{10}}_{1024\ (④より)} = \underline{{}_{11}C_1 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_5 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_{11}}$

③の左辺の⊖の項をすべて右辺に移項した。

よって④より，${}_{11}C_1 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_5 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_{11} = 1024$ である。…(答)