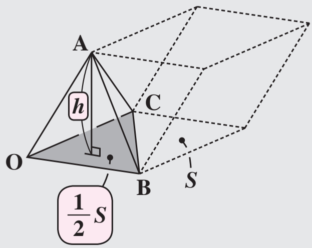
◆◆ Appendix（付録）◆◆

補充問題 1　　● スカラー 3 重積 ●

座標空間上の 4 点 O(0, 0, 0), A(−1, 2, 2), B(0, a, 3), C(3, −1, 1) を頂点にもつ四面体の体積 V が $V=\frac{4}{3}$ である。このとき，定数 a の値を求めよ。

ヒント！ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を 3 辺にもつ平行六面体の体積 V_0 は右図に示すように，$V_0=S\cdot h$（＝(底面積)×(高さ)）である。よって，四面体 OABC の体積 V は，(底面積)$=\frac{1}{2}S$，高さ h より，$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S\cdot h=\frac{1}{6}V_0$ となる。ここで $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ とおくと，V_0 はスカラー 3 重積の絶対値 $V_0=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ となるんだね。



解答＆解説

$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=[-1, 2, 2]$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=[0, a, 3]$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=[3, -1, 1]$ とおくとき，このスカラー 3 重積を T とおくと，

$$T=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 0 & a & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\underbrace{-a+18-6a-3}_{\text{サラスの公式}}=15-7a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

よって，四面体 OABC の体積 V は，①より，

$$V=\frac{1}{6}\underbrace{|T|}_{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\text{を 3 辺とする平行六面体の体積 }V_0\text{ のこと}}=\frac{1}{6}|15-7a| \quad\cdots\cdots\text{②}$$ となる。

ここで，$V=\frac{4}{3}$ であるので，②より，

$\frac{1}{6}|15-7a|=\frac{4}{3}$　　$\underline{15-7a=\pm 8}$

(i) $7a=7$ より $a=1$, (ii) $7a=23$ より $a=\frac{23}{7}$

以上より，求める定数 a の値は，$a=1$ または $\frac{23}{7}$ である。………………(答)