(1) をみたす行列 A は，$A=kE\ (k\fallingdotseq 0)$ を除いて，正則でないものだ。

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則でないとき，ケーリー・ハミルトンの定理より，

$$A^2-(a+d)A+\underbrace{(\cancel{ad-bc})}_{|A|=0\ (\because A\ は正則でない)}E=O$$

ここで，$a+d=k$ とおくと，

$A^2=kA$　　これから $A^n=k^{n-1}A\ (n=1,2,\cdots)$ となる。

この 4 つの公式は，すべて，数学的帰納法により証明できる。ここでは，(1) のみを証明しておこう。

(1)：(Ⅰ) $n=1$ のとき，左辺$=A^1$，右辺$=k^{1-1}A=A$ となって，成り立つ。

(Ⅱ) $n=m\ (m=1,2,\cdots)$ のとき，$A^m=k^{m-1}A$ が成り立つと仮定して，

この両辺に A をかけると，$A^{m+1}=k^{m-1}\underbrace{A^2}_{kA}=k^mA$　$(\because A^2=kA)$

となって，$n=m+1$ のときも成り立つ。

以上 (Ⅰ)(Ⅱ) より，$A^2=kA$ ならば $A^n=k^{n-1}A$　$(n=1,2,\cdots)$ は成り立つ。

(2)(3)(4) についても，自分で証明してみるといい。

● ケーリー・ハミルトンの定理を利用しよう！

4 つのパターンの行列の n 乗計算については教えたけれど，これに当てはまらない行列について，その n 乗を求めるには“**ケーリー・ハミルトンの定理**”が有効なんだね。次の例題で，実際に練習してみよう。

> $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ について，ケーリー・ハミルトンの定理を用いて，
>
> $A^n\ (n=1,2,\cdots)$ を求めてみよう。

まず，$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ が，前述の 4 つのパターンのどれにも当てはまらないことを確認してくれ。

それでは，ケーリー・ハミルトンの定理を用いて，

$A^2-(1+4)A+\{1\cdot 4-(-1)\cdot 2\}E=O$　より，

$A^2-5A+6E=O$ ……①

ここで，A に x，E に 1，O に 0 を代入した方程式を作ると，

$x^2-5x+6=0$ ………② となる。← これを行列 A の "**特性方程式**" という。

この②の左辺 x^2-5x+6 で x^n を割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと，

$$x^n=\underbrace{(x^2-5x+6)}_{2次式}\underbrace{Q(x)}_{商}+\underbrace{ax+b}_{余り(1次式)} \quad \cdots\cdots③$$ となる。よって，

$$x^n=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots③'$$

何故こんなことをするかについては，後で分かるよ！

③′は x の恒等式より，x にどんな数値を代入しても成り立つ。

つまり，$x^n=x^n$ のことなんだ。

よって，ここでは，特性方程式②の解の $x=2$ と 3 を③′に代入すると，

$$\begin{cases} 2^n=\cancel{\underbrace{(2-2)}_{0}(2-3)Q(2)}+a\cdot 2+b \\ 3^n=\cancel{(3-2)\underbrace{(3-3)}_{0}Q(3)}+a\cdot 3+b \end{cases}$$

よって，$\begin{cases} 2a+b=2^n & \cdots\cdots④ \\ 3a+b=3^n & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$ となる。

⑤－④より，　$a=3^n-2^n$ ………………⑥

④×3－⑤×2 より，$b=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$ ……⑦

ここで，A^n についても，③と同様に次式が成り立つ。

$$A^n=\cancel{\underbrace{(A^2-5A+6E)}_{O\ (①より)}Q(A)}+aA+bE \quad \cdots\cdots⑧$$

参考

行列の場合，一般に交換法則は成り立たない $(AB \fallingdotseq BA)$ ので，行列の計算に，整式の乗法公式 (または除法の公式) は使えない。でも，⑧に使われている

たとえば，$(A+B)^2 \fallingdotseq A^2+2AB+B^2$ だね。$(\because AB \fallingdotseq BA)$

行列を見てくれ。これらは E や A^k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の多項式だけなので，たとえば，$A^2\cdot E=E\cdot A^2$ や $A^2\cdot A^3=A^3\cdot A^2$ などのように，すべて交換法則が成り立つんだ。よって，x の整式の除法の公式③が成り立つのであれば，A^n の展開式⑧も同様に成り立つんだね。納得いった？

ここで，$A^2-5A+6E=O$ ……① より，これを⑧に代入すると，

$A^n=aA+bE$ ……⑨　となる。 ← A^n が A の 1 次式で表せた！

⑨に⑥，⑦を代入して A^n を求めると，

$$A^n=\underbrace{(3^n-2^n)}_{a}\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}+\underbrace{(3\cdot2^n-2\cdot3^n)}_{b}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3^n-2^n&-3^n+2^n\\2\cdot3^n-2\cdot2^n&4\cdot3^n-4\cdot2^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\cdot2^n-2\cdot3^n&0\\0&3\cdot2^n-2\cdot3^n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3^n+2\cdot2^n&-3^n+2^n\\2\cdot3^n-2\cdot2^n&2\cdot3^n-2^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3^n+2^{n+1}&-3^n+2^n\\2\cdot3^n-2^{n+1}&2\cdot3^n-2^n\end{bmatrix}\ (n=1,\ 2,\ 3\cdots)$$

となって，答えが求まった！

参考

結構複雑な計算だったから，これで合っているか否か，検算しておこう。

$n=1$ のとき，$A^1=\begin{bmatrix}-3^1+2^2&-3^1+2^1\\2\cdot3^1-2^2&2\cdot3^1-2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}$ となって，行列 A と一致する。よって，これでおそらく計算ミスはしていないことが分かるんだね。

● $P^{-1}AP$ の形の n 乗計算も重要だ！

4 つのパターンに乗らない場合，ケーリー・ハミルトンの定理を使う以外に，さらに一般的な 2 次の正方行列 A の n 乗計算についても教えよう。

ある正則な行列 P を使って

逆行列をもつという意味

$$P^{-1}AP=\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}}_{\text{対角行列}}\ \cdots\cdots①\text{や，}\ P^{-1}AP=\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{bmatrix}}_{\text{ジョルダン標準形}}\ \cdots\cdots②$$

の形にもち込み，A^n を求めることができる。

①の変形後，この両辺を n 乗して

$$\underbrace{(P^{-1}AP)^n}_{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)=P^{-1}AEAE\cdots EAP=P^{-1}A^nP}=\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}^n$$