演習問題 32　● 極座標変換による重積分 (Ⅲ) ●

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$　……(＊) となることを，次の手順に従って示せ。

(1) 重積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を，極座標に変数変換し，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて，求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$ を使って，(＊) が成り立つことを示せ。

(3) (＊) の x を用いて，$x = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$ と変換して，$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 1$ …(＊)′ が成り立つことを示せ。

ヒント！ (1) 極座標への変換では，$|J| = r$ となることがポイント。(2) x や y の文字の違いに意味がないことに注意する。

解答＆解説

(1) $V = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$　………①　とおく。

x, y を極座標に変換すると，

$x = r\cdot\cos\theta$，$y = r\cdot\sin\theta$

ここで，新たな $r\theta$ 座標系での領域

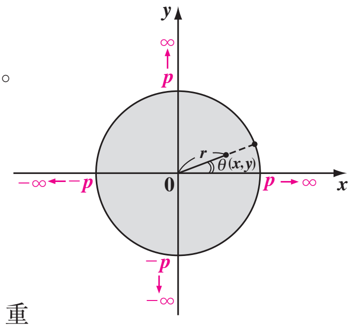
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$，$0 \leqq r \leqq p$　(p：正の定数)

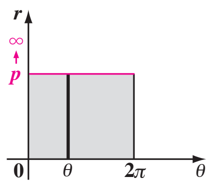
を作り，$p \to \infty$ とすることにより，①の重積分を行うことができる。

この場合のヤコビアンを J とおくと，

$|J| = r$ となる。

以上より，①を変形して，





$$V = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\overset{-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) = -r^2}{\boxed{-x^2-y^2}}}dxdy$$

$$= \lim_{p\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^p e^{-r^2}\underset{}{\overset{|J|}{r}}\,dr\right)d\theta$$

$$=\lim_{p\to\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{p}r\cdot e^{-r^2}dr$$

r と θ で，それぞれ独立に積分できる。

$$=\lim_{p\to\infty}[\,\theta\,]_0^{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{p}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\cancel{2}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(1-\overset{0}{e^{-p^2}})=\pi \quad\cdots\cdots②\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

(2) $$V=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy}_{=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx}$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2 \quad\cdots\cdots\cdots③$$

文字変数は x でもかまわない

以上②，③より，

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-x^2}}_{\oplus}dx\right)^2=\pi$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$ ………(＊) は成り立つ。……………………(終)

(3) (＊) の x を，$x=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ により，新たな変数 z に変換すると，

$dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}dz$ であり，また $x:-\infty\to\infty$ のとき，$z:-\infty\to\infty$ より，

$$((＊)\text{の左辺})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dz$$

$$=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\pi}}=((＊)\text{ の右辺})\text{ となる。}$$

以上より，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=1$$ ……(＊)′ が成り立つ。……………………(終)

(＊)′ の右辺の $\mathbf{1}$ を全確率 $\mathbf{1}$ とみて，$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ とおくと，$f(z)$ は，確率・統計の標準正規分布 $N(0,\,1)$ の確率密度になっているんだね。大丈夫？