演習問題 11　● 関数の極限とロピタルの定理(Ⅰ) ●

次の関数の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\tan^{-1}2x)}{x}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^{x^2}$　$(x>0)$

ヒント! (1) $\tan^{-1}2x=\theta$ とおくと, $2x=\tan\theta$ となり, $x\to 0$ のとき, $\theta\to 0$ となる。(2) は, x^{x^2} の自然対数をとって“ロピタルの定理”を利用しよう。

解答&解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\tan^{-1}2x)}{x}$ について, $\tan^{-1}2x=\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$2x=\tan\theta$ より, $x=\frac{1}{2}\tan\theta$　また, $x\to 0$ のとき, $\theta\to 0$ となる。

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\tan^{-1}2x)}{x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sinh\theta}{\frac{1}{2}\tan\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(\sinh\theta)'}{\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)'}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cosh\theta}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}}=\frac{\cosh 0}{\frac{1}{2\cos^2 0}}=\frac{1}{\frac{1}{2\times 1^2}}=2 \quad\cdots\cdots\cdots(答)$$

$\frac{e^0+e^0}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

公式：$(\sinh x)'=\cosh x$ $\left(\because \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$

(2) $x>0$ より, $x^{x^2}>0$ である。よって, x^{x^2} の自然対数をとって, この $x\to +0$ の極限を求めると,

$$\lim_{x\to +0}\log x^{x^2}=\lim_{x\to +0}x^2\cdot\log x=\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^2}}$$

$(+0)\times(-\infty)$ の不定形　　$\frac{-\infty}{\infty}$ の不定形

$$=\lim_{x\to +0}\frac{(\log x)'}{(x^{-2})'}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-2\cdot x^{-3}}=\lim_{x\to +0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$$

分子・分母に x^3 をかけた。

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to +0}\log \boxed{x^{x^2}}=0=\log\boxed{1}$ より, $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^{x^2}=1$ ……………………………(答)

実践問題 11　● 関数の極限とロピタルの定理 (Ⅱ) ●

次の関数の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\sin^{-1}x)}{x}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$　$(x>0)$

ヒント！ (1) $\sin^{-1}x=\theta$ とおくと，$x=\sin\theta$。また，$x\to 0$ のとき，$\theta\to 0$ となる。(2) 自然対数をとって，“ロピタルの定理”を使う。

解答＆解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\sin^{-1}x)}{x}$ について，$\sin^{-1}x=\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$x=\sin\theta$　また，$x\to 0$ のとき，$\theta\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sinh(\sin^{-1}x)}{x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sinh\theta}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\boxed{(\text{ア})}$$

ロピタルの定理

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cosh\theta}{\cos\theta}=\boxed{(\text{イ})}=\frac{1}{1}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $x>0$ より，$x^{\frac{1}{x}}>0$　　$x^{\frac{1}{x}}$ の自然対数をとって，$x\to\infty$ とすると，

$$\lim_{x\to\infty}\log x^{\boxed{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\boxed{(\text{ウ})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{x'}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\log \boxed{x^{\frac{1}{x}}}=0=\log\boxed{1} \text{ より，} \lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\boxed{(\text{エ})} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

解答　(ア) $\dfrac{(\sinh\theta)'}{(\sin\theta)'}$　(イ) $\dfrac{\cosh 0}{\cos 0}$　(ウ) $\dfrac{\log x}{x}$　(エ) 1