◆◆ Appendix（付録）◆◆

補充問題 1 ● 逆正接関数の和 ●

$\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{7}-\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ の値を求めよ。

ヒント！ $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{7}=\alpha$，$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\beta$ とおいて $\tan(\alpha-\beta)$ の値を加法定理から求めよう。

解答＆解説

$\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{7}-\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ について，

$$\begin{cases} \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{7}=\alpha \quad \cdots\cdots\text{①} \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \\ \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\beta \quad \cdots\cdots\text{②} \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$ とおくと，

$$\begin{cases} \text{①より，} \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{7} \quad \cdots\cdots\text{①}' \quad \left(\tan\alpha>0 \text{ より，} 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{②より，} \tan\beta=-\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots\text{②}' \quad \left(\tan\beta<0 \text{ より，} -\frac{\pi}{2}<\beta<0\right) \end{cases}$$ となる。

ここで，

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{7}-\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}{1+\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2\cancel{\sqrt{3}}}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{1}{2\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{14}}$$

分子・分母に $14\sqrt{3}$ をかけて

$$=\frac{6+7}{13\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{①}',\ \text{②}' \text{ より})$$

$$\underset{\text{小}}{0}-\underset{\text{大}}{0}<\alpha-\beta<\underset{\text{大}}{\frac{\pi}{2}}-\underset{\text{小}}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

また，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$ より，$0<\alpha-\beta<\pi$

以上より，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $(0<\alpha-\beta<\pi)$ から，$\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$ ……③

①，②を③に代入して，$\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{7}-\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$ ………………（答）