◆◆◆ Appendix(付録) ◆◆◆

補充問題 1 ● 式の値の計算 ●

実数 a, b, c が $a+b+c=0$ ……①, かつ $a^2+b^2+c^2=2$ ……② をみたすとき，次の各式の値を求めよ。

(i) $a^3+b^3+c^3-3abc$　　(ii) $ab+bc+ca$

(iii) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$　　(iv) $a^4+b^4+c^4$

ヒント！ (i) では $a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解公式を利用し，(ii) では $(a+b+c)^2$ の展開公式を利用すればいいんだね。(iii)，(iv) も同様だね。

解答＆解説

$a+b+c=0$ ………① と，

$a^2+b^2+c^2=2$ ……② より，

公式：
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(i) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=\underbrace{(a+b+c)}_{0\,(①より)}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$ ……………………(答)

公式：
$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(ii) $\underbrace{(a+b+c)^2}_{0^2=0\,(①より)}=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{2\,(②より)}+2(ab+bc+ca)$

よって，①，②より，$0=2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-1$ ……③ となる。 ……………………(答)

(iii) ③の両辺を 2 乗すると，

$\underbrace{(ab+bc+ca)^2}=\boxed{(-1)^2}^{\,1}$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2abc^2+2a^2bc$
$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+\cancel{2abc\underbrace{(a+b+c)}_{0\,(①より)}}$
$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$\alpha=ab$, $\beta=bc$, $\gamma=ca$
とおいて，公式：
$(\alpha+\beta+\gamma)^2$
$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$
を用いた。

$\therefore\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=1$ ……④ となる。 ……………………(答)

(iv) ②の両辺を 2 乗して，

$\underbrace{(a^2+b^2+c^2)^2}=2^2$ より，$a^4+b^4+c^2+2\times1=4$

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$
$a^4+b^4+c^4+2\underbrace{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}_{1\,(④より)}$

$\alpha=a^2$, $\beta=b^2$, $\gamma=c^2$
とおいて，
$(\alpha+\beta+\gamma)^2$ の展開公式を用いた。

$\therefore\ a^4+b^4+c^4=2$ である。 ……………………(答)