平面に関して対称な点

演習問題 85 難易度 ★★★ CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

空間座標の原点を $\mathbf{O}$ とし，2点 $\mathbf{A}(1,\ -2,\ 2)$，$\mathbf{B}(4,\ -2,\ 5)$ をとる。

点 A を通り $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ に垂直な平面を α とする。

(1) 平面 α に関し，点 B と対称な点 C の座標を求めよ。

(2) △OBC の面積を求めよ。　　　　(信州大)

ヒント！ (1) 平面 α は，点 A を通り，法線ベクトル $\vec{n}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ の平面なんだね。これから $\overrightarrow{\mathbf{BC}}/\!/\overrightarrow{\mathbf{OA}}$（平行）であり，また，線分 BC の中点が平面 α 上の点であることから点 C の座標を求めよう。(2) △OBC の面積 S は，公式

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathbf{OB}}|^2\cdot|\overrightarrow{\mathbf{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathbf{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OC}})^2}$ から求めればいいんだね。

解答＆解説

ココがポイント

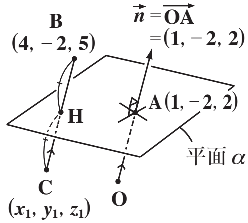
(1) 右図に示すように，平面 α は点 $\mathbf{A}(1,-2,2)$ を通り，

法線ベクトル $\vec{n}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}=(1,\ -2,\ 2)$ の平面より，

平面 α : $1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)+2(z-2)=0$

$x-2y+2z-9=0$ ……① となる。

⇦イメージ



点 $\mathbf{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ の平面の方程式は，$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ である。

次に，平面 α に関して，点 $\mathbf{B}(4,\ -2,\ 5)$ と対称な点 C の座標を $\mathbf{C}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{OC}}-\overrightarrow{\mathbf{OB}}=(x_1-4,\ y_1+2,\ z_1-5)$ となり，

$\overrightarrow{\mathbf{BC}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathbf{OA}}$（平行）より，媒介変数 t を用いると，

$\dfrac{x_1-4}{1}=\dfrac{y_1+2}{-2}=\dfrac{z_1-5}{2}=t$（媒介変数）……②

⇦ $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ が平行であるとき，$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}\ (=t)$ とおける。

となる。よって②より，$x_1,\ y_1,\ z_1$ は t を用いて，

$$\begin{cases} x_1=t+4 & \cdots\cdots③ \\ y_1=-2t-2 & \cdots\cdots④ \\ z_1=2t+5 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$ と表せる。

$x_1-4=t$，$\dfrac{y_1+2}{-2}=t$，$\dfrac{z_1-5}{2}=t$

次に線分 BC の中点を H とおくと，

$\mathbf{H}\left(\dfrac{x_1+4}{2},\ \dfrac{y_1-2}{2},\ \dfrac{z_1+5}{2}\right)$ ……⑥ となる。

⇦ $\mathbf{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathbf{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ のとき，線分 AB の中点 M は $\mathbf{M}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2},\ \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ となる。

③，④，⑤を

$\mathrm{H}\left(\dfrac{x_1+4}{2},\ \dfrac{y_1-2}{2},\ \dfrac{z_1+5}{2}\right)$ ……⑥に代入すると，

$\mathrm{H}\left(\dfrac{t}{2}+4,\ -t-2,\ t+5\right)$ ……⑥´となる。

ここで，点 H は

平面 α : $x-2y+2z-9=0$ ……①上の点より，

H の座標を①に代入して，

$\dfrac{t}{2}+4-2(-t-2)+2(t+5)-9=0$ よって，

$t=-2$ ……⑦ となる。

⑦を③，④，⑤に代入すると，求める対称点 C の座標は $\mathrm{C}(x_1, y_1, z_1)=(-2+4,\ 4-2,\ -4+5)$ より，C(2, 2, 1) である。…………(答)

⇦ $\begin{cases} x_1=t+4 & \cdots\cdots③ \\ y_1=-2t-2 & \cdots\cdots④ \\ z_1=2t+5 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$

⇦ $\mathrm{H}\left(\dfrac{t+8}{2},\ \dfrac{-2t-4}{2},\ \dfrac{2t+10}{2}\right)$

⇦ 両辺に2をかけて
$t+8-4(-t-2)+4(t+5)-18=0$
$9t+8+8+20-18=0$
$9t=-18$ $\therefore t=-2$

(2) B(4, −2, 5)，C(2, 2, 1) より，

$\overrightarrow{OB}=(4,\ -2,\ 5)$，$\overrightarrow{OC}=(2,\ 2,\ 1)$ よって，

$|\overrightarrow{OB}|^2=4^2+(-2)^2+5^2=16+4+25=45$

$|\overrightarrow{OC}|^2=2^2+2^2+1^2=4+4+1=9$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=4\times2-2\times2+5\times1=8-4+5=9$ より，

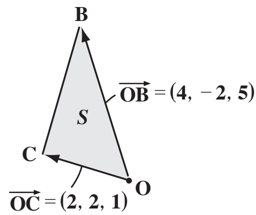
求める△OBC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2\cdot|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{45\times9-9^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot(45-9)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\times36}=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times6^2}=\frac{3\times6}{2}=9 \text{ である。}$$

……(答)



⇦ 一般に，△OAB の面積 S を求める公式は，
$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2\cdot|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$
である。
（この公式は平面図形と空間図形のいずれにも使える！）