演習問題 24　● 対称行列の直交行列による対角化(Ⅰ) ●

対称行列 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を，変換行列に直交行列 U を用いて，

$U^{-1}AU$ として対角化せよ。

ヒント！ 固有方程式 $|T|=|A-\lambda E|=0$ を解いて，固有値を求めよう。今回 3 つの異なる固有値が得られるので，それを基に直交行列 U を作って，$U^{-1}AU$ により A を対角化するんだね。

解答＆解説

$Tx=0$ ……① ただし，$T=A-\lambda E=\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$ である。

固有方程式 $|T|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(1-\lambda)-4(1-\lambda)=(\lambda^2-4)(1-\lambda)$

$$=\boxed{-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)=0}$$

∴ 3 つの異なる固有値 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$ が求まる。

(i) $\lambda_1=1$ のとき，①を $T_1x_1=0$　そして $x_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$T_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Big\}r=2$

rank$T_1=2$ より，自由度 $=3-2=1$

$\alpha_2=k_1$ とおく。

$\alpha_1-2\alpha_3=0$，$\alpha_3=0$

ここで，$\alpha_2=k_1$ とおくと，

$\alpha_1=\alpha_3=0$ より，

$$x_1=\begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \\ 0 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで，$\|x_1\|=1$ とするため，$k_1=1$ とする。∴ $x_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda_2=2$ のとき，①を $T_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$　そして $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&-1&0\\2&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$T_2=\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&-1&0\\2&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Big\}r=2$

$\mathrm{rank}\,T_2=2$ より，自由度 $=3-2=1$

$\beta_3=k_2$ とおく。

$\beta_1-\beta_3=0$，$\beta_2=0$　ここで，$\beta_3=k_2$ とおくと，$\beta_1=\beta_3=k_2$ より，

$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}k_2\\0\\k_2\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ となる。ここで，$\|\boldsymbol{x}_2\|=1$ とするため $\boldsymbol{x}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

(iii) $\lambda_3=-2$ のとき，①を $T_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$

そして $\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix}2&0&2\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$T_3=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Big\}r=2$

$\mathrm{rank}\,T_3=2$ より，自由度 $=3-2=1$

$\gamma_1=k_3$ とおく。

表

固有値 λ	$\lambda_1=1$	$\lambda_2=2$	$\lambda_3=-2$
固有ベクトル $\boldsymbol{x}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$
変換行列 U	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$		
対角行列 $U^{-1}AU$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$		

$\gamma_1+\gamma_3=0$，$\gamma_2=0$　ここで，$\gamma_1=k_3$ とおくと，$\gamma_3=-\gamma_1=-k_3$ より，

$\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}k_3\\0\\-k_3\end{bmatrix}=k_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ となる。ここで，$\|\boldsymbol{x}_3\|=1$ とするため $\boldsymbol{x}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

以上 (i)(ii)(iii) より，$U=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$ とおくと，

$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ となる。……………………………(答)