演習問題 35　● 曲面の面積（Ⅳ）●

曲面 $z = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqq x \leqq 1,$ かつ $0 \leqq y \leqq 1)$ の面積 S を求めよ。

ヒント！ $z = f(x, y) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}$ とおくと，$f_x = 2\sqrt{x}$，$f_y = 2\sqrt{y}$ となるため，この曲面の面積 S は $S = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{4x+4y+1}\,dxdy$ となるんだね。今回は変数変換せずに，このまま，x と y の2重積分として計算しよう。

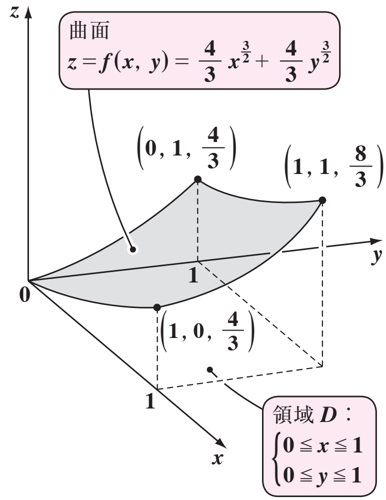
解答＆解説

右図に示すような曲面

$z = f(x, y) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}$ ……①

の領域 D：$0 \leqq x \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$

における面積 S を求める。



$$\begin{cases} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{4}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{3}}{2}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} \\ f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{3}}{2}y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y} \end{cases}$$

よって，曲面の面積公式を用いると，

$$S = \iint_D \sqrt{\underbrace{f_x{}^2}_{(2\sqrt{x})^2} + \underbrace{f_y{}^2}_{(2\sqrt{y})^2} + 1}\,dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \sqrt{4x+4y+1}\,dxdy \quad \cdots\cdots ②$$ となる。

よって，x と y による2重積分により，面積 S を求める。

$$S = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (4x + \overbrace{4y + 1}^{\text{定数扱い}})^{\frac{1}{2}} dx \right\} dy$$

$$\frac{1}{6}\left[(4x+4y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{6}\left\{(4+4y+1)^{\frac{3}{2}} - (4y+1)^{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$= \frac{1}{6}\left\{(4y+5)^{\frac{3}{2}} - (4y+1)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

・x による偏微分

$$\left\{(4x+4y+1)^{\frac{3}{2}}\right\}_x$$
$$= \frac{3}{2}(4x+4y+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4$$
$$= 6(4x+4y+1)^{\frac{1}{2}} \text{ より，}$$

・$\displaystyle\int (4x+4y+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \frac{1}{6}(4x+4y+1)^{\frac{3}{2}} \text{ となる。}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \left\{(4y+5)^{\frac{3}{2}} - (4y+1)^{\frac{3}{2}}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{6}\left\{ \int_0^1 (4y+5)^{\frac{3}{2}} dy - \int_0^1 (4y+1)^{\frac{3}{2}} dy \right\}$$

$$\frac{1}{10}\left[(4y+5)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{10}\left(9^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{10}\left[(4y+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{10}\left(5^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right)$$

(i) y による偏微分

$$\left\{(4y+5)^{\frac{5}{2}}\right\}_y$$
$$= \frac{5}{2}(4y+5)^{\frac{3}{2}} \cdot 4$$
$$= 10(4y+5)^{\frac{3}{2}} \text{ より，}$$

・$\displaystyle\int (4y+5)^{\frac{3}{2}} dy$

$$= \frac{1}{10}(4y+5)^{\frac{5}{2}} \text{ となる。}$$

(ii) $(4y+1)^{\frac{3}{2}}$ の積分も同様に，

・$\displaystyle\int (4y+1)^{\frac{3}{2}} dy$

$$= \frac{1}{10}(4y+1)^{\frac{5}{2}} \text{ となる。}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{10}\left\{9^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}} - \left(5^{\frac{5}{2}} - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{60}\left(\underbrace{9^{\frac{5}{2}}}_{3^5 = 243} - 2 \cdot \underbrace{5^{\frac{5}{2}}}_{25\sqrt{5}} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{60}(244 - 50\sqrt{5})$$

以上より，求める領域 D における曲面の面積 S は，

$S = \dfrac{1}{30}(122 - 25\sqrt{5})$ である。……………………………………………(答)