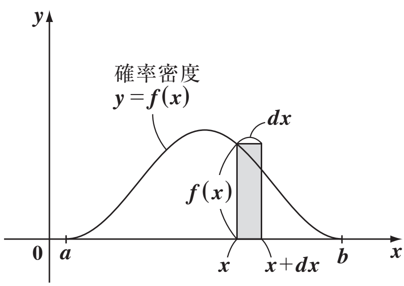
以上の説明でも，まだピンとこないと思っておられる読者の方も多いと思う。このリウビルの定理と等確率の原理(または，等重率の原理)は，統計力学の基礎となるものだから，ここがあいまいな理解ではよくないので，さらに詳しく解説しておこう。

少し話は横道にそれるけれど，類似性により，理解するのに役に立つと思うので，高校で習ったことのある連続型の確率変数 x と確率密度 $y=f(x)$ について考えてみよう。図3に示すように閉区間 $[a,\ b]$ で定義された確率密度 $y=f(x)$ があるとする。このとき連続型の確率変数 x がある x となる確率は？と聞かれたら答えは当然 0 だね。何故なら，閉区間 $[a,\ b]$ の中に点は無限に存在するわけだから，x がある x となる確率は $\frac{1}{\infty}=0$ となるからだ。

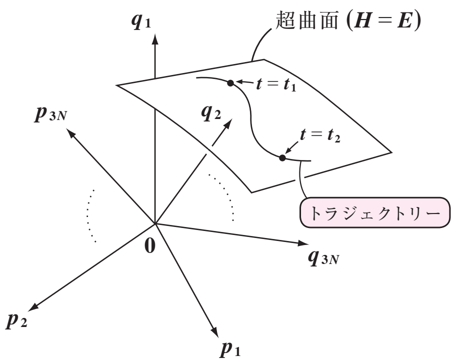
図 3　1 次元確率密度 $y=f(x)$



したがって，1 次元連続型の確率変数 x について，その確率が問題となるのは，変数 x が，微小区間 $[x,\ x+dx]$ に入る確率で，これは確率密度 $f(x)$ を用いて，$f(x)\cdot dx$ であると，答えることができるんだね。

では，話を位相空間に戻そう。図4に示すように位相空間内の $H=E$ をみたす超曲面上に描かれるトラジェクトリー上に時刻 $t=t_1$ における代表点が1つ存在しているけれど，代表点がこの図4に示した点となる確率はどうなる？…，そうだね，0 だね。広大な $6N$ 次元の位相空間全

図 4　超曲面上のトラジェクトリー

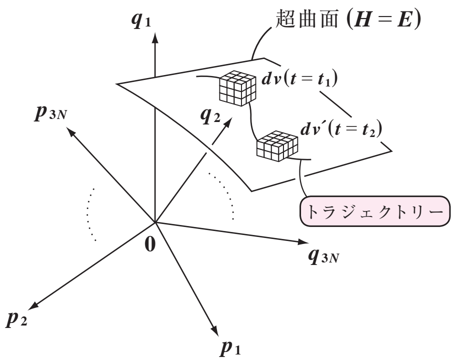


体を $6N$ 次元の極超立体の体積 h^{3N} で割った格子点数（または，極超立体の数）を M とすると，M は非常に大きな数であるので，$t=t_1$ における代表点が図 4 のトラジェクトリー上の 1 点となる確率は，当然 $\frac{1}{M}=0$ となるわけだね。同様に，時刻 $t=t_2$ における代表点が図 4 のトラジェクトリー上の 1 点になる確率も $\frac{1}{M}=0$ となるのも大丈夫だね。

以上のことは，連続型確率変数 x がある x の値になる確率が $0\left(=\frac{1}{\infty}\right)$ になることに対応している。ということは，トラジェクトリー上の代表点の確率は，その近傍の超体積要素に代表点が存在する確率として，評価する以外にないんだね。

つまり，図 5 に示すように，時刻 $t=t_1$ におけるトラジェクトリー上の代表点の近傍の超体積要素の体積 dv を極超立体の体積 h^{3N} で割ったミクロな状態の数 $g\left(=\frac{dv}{h^{3N}}\right)$ を位相空間全体の状態の数 M で割ったもの，すなわち $\frac{g}{M}$ が，$t=t_1$ のとき，トラジェクトリー上の代表点（または，その近傍）における確率と考えればいいんだね。

図 5　リウビルの定理と等確率の原理



ここで，時刻が $t=t_1$ から $t=t_2$ に変化すると，代表点の位置は図 5 のトラジェクトリー上を移動する。すると，$t=t_2$ の点における超体積要素の形状は変化するかもしれないけれど，その体積 dv' は，リウビルの定理により dv と一致する。よって，ミクロな状態の数 g も変化しない。したがって，これを全体の状態の数 M で割った $\frac{g}{M}$，すなわち，$t=t_2$ における