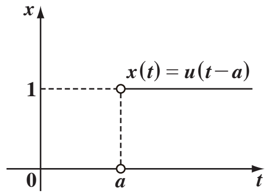
移動したものになっている。したがって，この計算結果に対して，$a \to +0$ の極限をとれば，インパルス応答の入・出力に帰着することが示せたんだね。納得いった？

では次，インディシャル応答についても調べておこう。まず，入力の初期条件をみたすために，入力の単位階段関数を右図に示すように，$a(>0)$ だけ平行移動して，$x(t)=u(t-a)$ とする。



このとき，$x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ は，

$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{L}[u(t-a)]=\dfrac{e^{-as}}{s}$ ……③ となる。

公式（P70）
$\mathcal{L}[u(t-a)]=\dfrac{e^{-as}}{s}$

よって，③を $Y(s)=G(s)\cdot X(s)$ ……(*1) に代入して，

$$Y(s)=\frac{1}{1+Ts}\cdot\frac{e^{-as}}{s}=e^{-as}\cdot\frac{1}{s(1+Ts)}=e^{-as}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right) \quad \cdots\cdots ④$$ となる。

部分分数に分解した。

ここで，$F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\frac{1}{T}} \longleftrightarrow f(t)$ とおくと，

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]=u(t)-e^{-\frac{1}{T}t}$$

公式（P116）
$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]=u(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right]=e^{at}$

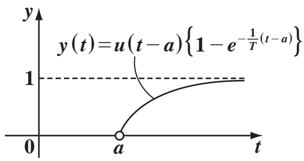
よって，ラプラスの逆変換の公式（P123）：

$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}\cdot F(s)]=u(t-a)\cdot f(t-a)$ を用いて④を逆変換して，出力 $y(t)$ を求めると，

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}\cdot F(s)]=u(t-a)\left\{u(t-a)-e^{-\frac{1}{T}(t-a)}\right\}$$

これは，1とおいていい。どうせ $u(t-a)$ がかかるからだ。

$\therefore\ y(t)=u(t-a)\left\{1-e^{-\frac{1}{T}(t-a)}\right\}$ となって，



$y(t)$ のグラフは右のようになる。したがって，$a \to +0$ の極限をとると，P219 で示した出力

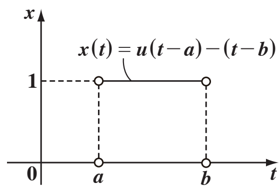
$y_2 = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}$ と一致することが，ご理解頂けると思う。

では，これと関連して，もう1題，入力 $x(t)$ が矩形波の場合の出力 $y(t)$ を求めてみよう。

(ex3) 1次遅れ要素の伝達関数 $G(s) = \dfrac{1}{1+Ts}$ （T：時定数，$k=1$）について，入力 $x(t) = u(t-a) - u(t-b)$ （ただし，$0 < a < b$）の応答出力 $y(t)$ を求めてみよう。

$u(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1 & (a < t) \end{cases}$，$u(t-b) = \begin{cases} 0 & (t < b) \\ 1 & (b < t) \end{cases}$ $(0 < a < b)$ より，入力 $x(t)$ は，

$$x(t) = u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1 & (a < t < b) \\ 0 & (b < t) \end{cases}$$



となって，右図に示すような矩形波（くけいは）であることが分かるんだね。

“長方形”のこと

ではまず，入力 $x(t)$ をラプラス変換すると，

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[u(t-a) - u(t-b)]$$

$$= \mathcal{L}[u(t-a)] - \mathcal{L}[u(t-b)]$$

$$= \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s} \quad \cdots\cdots①$$ となる。

公式(P70)
$\mathcal{L}[u(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}$

よって，出力（応答）$y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ は，

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{1}{1+Ts}\left(\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s}\right)$$

$$= e^{-as}\underbrace{\frac{1}{s(1+Ts)}}_{F(s)} - e^{-bs}\underbrace{\frac{1}{s(1+Ts)}}_{F(s)}$$

公式(P116)
$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = u(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$

ここで，$F(s) = \dfrac{1}{s(1+Ts)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+\frac{1}{T}} \longleftrightarrow f(t)$ とおくと，

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right] = u(t) - e^{-\frac{1}{T}t} \quad \cdots\cdots②$$ となる。

以上より，$Y(s)$ をラプラス逆変換して，出力（応答）$y(t)$ を求めると，

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)-e^{-bs}F(s)]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]-\mathcal{L}^{-1}[e^{-bs}F(s)]$$

$$=u(t-a)\cdot \underbrace{f(t-a)}_{u(t-a)-e^{-\frac{1}{T}(t-a)}}-u(t-b)\cdot \underbrace{f(t-b)}_{u(t-b)-e^{-\frac{1}{T}(t-b)}}$$

公式（P123）
$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}\cdot F(s)]$
$=u(t-a)\cdot f(t-a)$

②より

$$=u(t-a)\left\{1-e^{-\frac{1}{T}(t-a)}\right\}-u(t-b)\left\{1-e^{-\frac{1}{T}(t-b)}\right\}$$

この $u(t-a)$ は 1 とおける。どうせ，これに，$u(t-a)$ がかかるからだ。

この $u(t-b)$ は 1 とおける。どうせ，これに，$u(t-b)$ がかかるからだ。

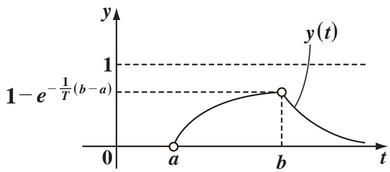
以上より，矩形波の入力 $x(t)$ に対する出力 $y(t)$ は，

$y(t)=u(t-a)\left\{1-e^{-\frac{1}{T}(t-a)}\right\}-u(t-b)\left\{1-e^{-\frac{1}{T}(t-b)}\right\}$ となる。これを，

(ⅰ) $0\leqq t<a$，(ⅱ) $a<t<b$，(ⅲ) $b<t$ の 3 通りに場合分けして調べると，

$$\begin{cases}\text{(i) } 0\leqq t<a \text{ のとき，} & y(t)=0\\ \text{(ii) } a<t<b \text{ のとき，} & y(t)=1-e^{-\frac{1}{T}(t-a)}\\ \text{(iii) } b<t \text{ のとき，} & y(t)=\cancel{1}-e^{-\frac{1}{T}(t-a)}-\left\{\cancel{1}-e^{-\frac{1}{T}(t-b)}\right\}\\ & \quad=-e^{-\frac{1}{T}(t-a)}+e^{-\frac{1}{T}(t-b)}\end{cases}$$

となるので，この出力 $y(t)$ のグラフは右図のようになるんだね。
面白かったでしょう？



以上で，本当の初歩ではあるのだけれど，これで自動制御入門の講義も終了です。ラプラス変換とその逆変換が随所に使われていたので，ラプラス変換の応用として興味をもって頂けたと思う。

自動制御は，現代の工業技術を支える重要でかつ実践的な理論なので，興味を持たれた方は，今回の講義を基にして，さらに本格的に学習していかれることをお勧めします。