余弦定理の図形への応用

絶対暗記問題 36	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

AB = **4**, **BC** = **6**, **CA** = **5** の△**ABC** がある。△**ABC** の内心を **I** とし，直線 **AI** と辺 **BC** の交点を **D** とする。以下の問いに答えよ。

(1) **BD** の長さを求めよ。

(2) **AI** の長さを求めよ。

(3) △**ABI** の面積 S を求めよ。　　　　　　　　　　　　（北星学園大）

ヒント！ (1) 線分 AD は，∠A の 2 等分線より，BD：DC = AB：AC が成り立つんだね。(2) ∠ABC = θ，AD = x とおいて，△ABC と△ABD に余弦定理を用いると，x と $\cos\theta$ の値が求められる。また，AI：ID = AB：BD である。(3) まず，$\sin\theta$ を求めて△ABD の面積を求め，これから△ABI の面積を求めればいいんだね。

解答＆解説

(1) 直線 AD(または，AI) は，頂角∠A の 2 等分線より，

BD：DC = AB：AC

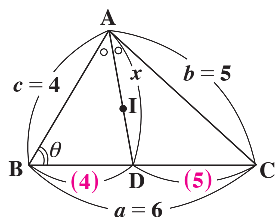
　　　　= 4：5 である。

よって，図(i)より明らかに，

$$BD = \frac{4}{9}\cdot\underbrace{BC}_{6} = \frac{4}{9}\times 6$$

$$= \frac{8}{3}$$ ……① である。……(答)

図(i)



(2) 次に，図(i)に示すように，∠ABC = θ，AD = x とおく。

(i) △ABC に余弦定理を用いると，

$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cos\theta$ より，← $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\theta$

$25 = 16 + 36 - 48\cos\theta$，$\cos\theta = \frac{1}{48}(52-25) = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$

$\cos\theta = \frac{9}{16}$ ……② である。

(ⅱ) 次に，△ABD に余弦定理を用いると，

$$x^2 = 4^2 + \Big(\underbrace{\frac{8}{3}}_{\mathrm{BD}\,(①より)}\Big)^2 - 2\cdot 4\cdot\frac{8}{3}\cdot\underbrace{\cos\theta}_{\frac{9}{16}\,(②より)}$$

$\mathrm{AD}^2 = c^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\cdot c\cdot \mathrm{BD}\cdot\cos\theta$

$$= 16 + \frac{64}{9} - \underbrace{\frac{64}{3}\cdot\frac{9}{16}}_{\frac{9}{3}\times\frac{64}{16}=3\times 4=12} = 4 + \frac{64}{9} = \frac{36+64}{9} = \frac{100}{9} \text{ より，}$$

$x = \mathrm{AD} = \sqrt{\dfrac{100}{9}} = \dfrac{10}{3}$ ……③ である。

図 (ⅱ)

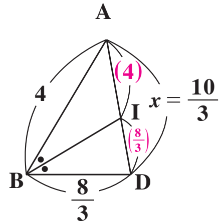


図 (ⅱ) に示すように，BI は∠ABD の 2 等分線だから，

$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{BD} = 4 : \dfrac{8}{3}$

$= 12 : 8 = 3 : 2$ より，

$\mathrm{AI} = \dfrac{3}{5}\cdot\underbrace{\mathrm{AD}}_{x=\frac{10}{3}\,(③より)} = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{10}{3} = 2$ である。 ……………………………………(答)

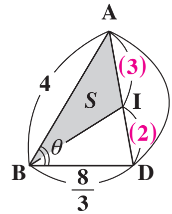
(3) $\cos\theta = \dfrac{9}{16}$ ……②であり，$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であるので，

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\Big(\frac{9}{16}\Big)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16^2-9^2}{16^2}} = \frac{\sqrt{(16+9)(16-9)}}{16}$$

$$= \frac{\sqrt{5^2\cdot 7}}{16} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

図 (ⅲ)



よって，△ABD の面積を S' とおくと，

$$S' = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

ここで，図 (ⅲ) に示すように，$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=3:2$ より，求める△ABI の面積 S は，

$S = \dfrac{3}{5}\cdot S' = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{5\sqrt{7}}{3} = \sqrt{7}$ である。 ……………………………………(答)