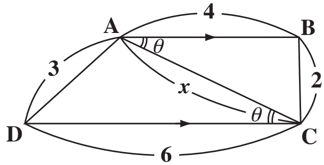
補充問題 4	三角比の図形への応用	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

右図に示すような四角形 ABCD があり，$AB /\!/ DC$，$AB = 4$，$BC = 2$，$CD = 6$，$DA = 3$ である。

(1) $AC = x$，$\angle BAC = \theta$ とおいて，三角形 ABC に余弦定理を用いて，$\cos\theta$ を x で表せ。次に，$\angle ACD = \theta$ とおいて，三角形 ACD に余弦定理を用いて，$\cos\theta$ を x で表せ。



(2) $AC = x$ と，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求め，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。　　(信州大＊)

ヒント！ $AB /\!/ DC$ より，錯覚(さっかく)は等しいので，$\angle BAC = \angle ACD = \theta$ となるんだね。(1) では，△ABC と△ACD に余弦定理を用いて，$\cos\theta$ を x で表す方程式を 2 つ作ろう。(2) では x と $\cos\theta$ の値を求め，$\cos\theta$ から $\sin\theta$ を求めよう。そして，⏢ABCD = △ABC + △ACD から四角形 ABCD の面積 S を求めればいいんだね。実際に受験で出題された問題だよ。頑張ろう！

解答＆解説

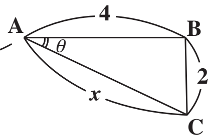
“なぜなら” を表す記号

(1) $AC = x$，$\angle BAC = \angle ACD = \theta$ とおく。$(\because AB /\!/ DC)$

(i) △ABC に余弦定理を用いると，

$$2^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos\theta$$

2 をピンセットでつまむ要領だね。



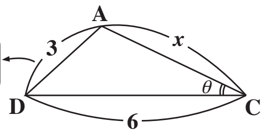
$$8x \cdot \cos\theta = x^2 + 12$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{x^2 + 12}{8x} \quad \cdots\cdots ①$$ となる。……(答)

(ii) △ACD に余弦定理を用いると，

$$3^2 = 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \cos\theta$$

3 をピンセットでつまむ要領だね。



$$12x \cdot \cos\theta = x^2 + 27$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{x^2 + 27}{12x} \quad \cdots\cdots ②$$ となる。……(答)

(2) ①，②より $\cos\theta$ を消去して，

$$\frac{x^2 + 12}{8x} = \frac{x^2 + 27}{12x} \quad \cdots\cdots ③$$ となる。③の両辺に $24x$ をかけて，

$$3(x^2+12)=2(x^2+27)$$

$$3x^2+36=2x^2+54$$

$$3x^2-2x^2=54-36$$

$$x^2=18$$

ここで, $x=\mathrm{AC}>0$ より, $x=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$ …④ である。…(答)

④を①に代入すると,

$$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{2})^2+12}{8\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{18+12}{24\sqrt{2}}=\frac{30}{24\sqrt{2}}=\frac{5}{4\sqrt{2}}$$

分子・分母に $\sqrt{2}$ をかけて

$\cos\theta=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$ ……⑤ となる。……………………………………(答)

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ ……⑥

公式：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より,
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$
$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$ となる。
ここで, $0°<\theta<180°$より, $\sin\theta>0$
よって, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ となる。

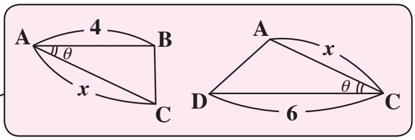
⑥に⑤を代入して,

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{25\times 2}{64}}$$

$=\sqrt{\dfrac{64-50}{64}}=\sqrt{\dfrac{14}{64}}=\dfrac{\sqrt{14}}{8}$ ……⑦ となる。………………………(答)

よって, ▱ABCD の面積 S は,

$$S=\underbrace{\triangle\mathrm{ABC}}_{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot\sin\theta}+\underbrace{\triangle\mathrm{ACD}}_{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\cdot\sin\theta}$$



$$=2x\sin\theta+3x\sin\theta$$

$$=5\cdot\underbrace{x}_{3\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\sin\theta}_{\frac{\sqrt{14}}{8}}=5\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{14}}{8}=\frac{15\times\overbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}^{2}\times\sqrt{7}}{8}\quad(④, ⑦より)$$

④, ⑦より

$\therefore S=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ である。……………………………………(答)