演習問題 13 ● 原始関数による積分 ●

原始関数を用いて，次の積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_i^1 z^2(z^3+1)^4dz$　　(2) $\displaystyle\int_1^{1-i}(2z+1)e^{z^2+z}dz$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}i}^{\frac{\pi}{2}i}\sin^4 z\cdot\cos z\,dz$

ヒント！ 正則関数の原始関数を求めて，積分値を求めよう。

解答＆解説

(1) $\{(z^3+1)^5\}'=5\cdot(z^3+1)^4\cdot(z^3+1)'=15z^2(z^3+1)^4$ より，

$$\int_i^1 z^2(z^3+1)^4dz=\frac{1}{15}\left[(z^3+1)^5\right]_i^1=\frac{1}{15}\{2^5-(i^3+1)^5\}$$

$2^5=32$

$\{(1-i)^2\}^2\cdot(1-i)=(1-2i+i^2)^2(1-i)=-4(1-i)=-4+4i$

$$=\frac{1}{15}(32+4-4i)=\frac{4}{15}(9-i)$$

(2) $(e^{z^2+z})'=e^{z^2+z}\cdot(z^2+z)'=(2z+1)e^{z^2+z}$ より，

$$\int_1^{1-i}(2z+1)e^{z^2+z}dz=\left[e^{z^2+z}\right]_1^{1-i}=e^{(1-i)^2+1-i}-e^2$$

$1-2i+i^2+1-i=1-3i$

$$=e^{1-3i}-e^2=e\cdot e^{i\cdot(-3)}-e^2=e\{\cos(-3)+i\sin(-3)\}-e^2$$

オイラーの公式

$$=e(\cos 3-i\sin 3-e)$$

(3) $(\sin^5 z)'=5\cdot\sin^4 z\cdot(\sin z)'=5\sin^4 z\cdot\cos z$ より，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}i}^{\frac{\pi}{2}i}\sin^4 z\cdot\cos z\,dz=\frac{1}{5}\left[\sin^5 z\right]_{-\frac{\pi}{2}i}^{\frac{\pi}{2}i}=\frac{1}{5}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2}i\right)^5-\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}i\right)\right)^5\right\}$$

$\left(-\sin\frac{\pi}{2}i\right)^5=-\left(\sin\frac{\pi}{2}i\right)^5$

$$=\frac{2}{5}\left(\sin\frac{\pi}{2}i\right)^5$$

$\left(\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}i^2}-e^{-\frac{\pi}{2}i^2}}{2i}\right)^5=\left(\dfrac{-1}{i}\cdot\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^5=\left(i\cdot\sinh\dfrac{\pi}{2}\right)^5=i\cdot\sinh^5\dfrac{\pi}{2}$

（$-1=i^2$，$i^4\cdot i=1\cdot i$）

$$=\frac{2}{5}i\sinh^5\frac{\pi}{2}$$

実践問題 13 ● 原始関数による積分 ●

原始関数を用いて，次の積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{1+i} z^3(z^4+4)^3dz$　　(2) $\displaystyle\int_{-i}^{1+i}(3z^2+1)e^{z^3+z}dz$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}i}\sin^2 z\cos z\,dz$

ヒント！ 前問と同様に，原始関数を使って積分計算しよう。

解答＆解説

(1) $\{(z^4+4)^4\}'=4(z^4+4)^3\cdot(z^4+4)'=16z^3(z^4+4)^3$ より，

$$\int_0^{1+i} z^3(z^4+4)^3dz=\frac{1}{16}\left[(z^4+4)^4\right]_0^{1+i}=\frac{1}{16}\{((1+i)^4+4)^4-4^4\}$$

$(1+2i+i^2)^2+4=4\cdot i^2+4=0$，　$(2^4)^2=16^2$

$$=-\frac{16^2}{16}=\boxed{(ア)\quad}$$

(2) $(e^{z^3+z})'=e^{z^3+z}\cdot(z^3+z)'=(3z^2+1)\cdot e^{z^3+z}$

$$\int_{-i}^{1+i}(3z^2+1)\cdot e^{z^3+z}dz=\left[e^{z^3+z}\right]_{-i}^{1+i}$$

$1+3i+3i^2+i^3+1+i=-1+3i$，　$-i^3-i=i-i=0$

$$=e^{(1+i)^3+1+i}-e^{(-i)^3-i}$$

$$=e^{-1}\cdot e^{3i}-1=\boxed{(イ)\quad}$$

(3) $(\sin^3 z)'=3\sin^2 z\cdot(\sin z)'=3\sin^2 z\cdot\cos z$ より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}i}\sin^2 z\cdot\cos z\,dz=\frac{1}{3}\left[\sin^3 z\right]_0^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{1}{3}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}i\right)^3-(\sin 0)^3\right\}$$

$(\sin 0)^3 = 0$

$$\left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}i^2}-e^{-\frac{\pi}{4}i^2}}{2i}\right)^3=\left(\frac{-1}{i}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^3=\left(i\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^3=-i\sinh^3\frac{\pi}{4}$$

（$-1=i^2$，$-i=i^2\cdot i$）

$$=\boxed{(ウ)\quad}$$

解答　(ア) -16　　(イ) $e^{-1}(\cos 3+i\sin 3)-1$　　(ウ) $-\dfrac{i}{3}\sinh^3\dfrac{\pi}{4}$