演習問題 115　● エルミート行列の対角化(Ⅰ)●

エルミート行列 $A_H=\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 U_U を用いて，$U_U{}^{-1}A_HU_U$ として対角化せよ。

ヒント！ 固有方程式から相異なる 2 つの固有値が求まる。それぞれの固有値に対する固有ベクトルから，正規直交系 $\{u_1, u_2\}$ を求めよう。

解答＆解説

$\underbrace{Tx=0}_{A_Hx=\lambda x\ (x\neq 0)\text{ と同値}}$ ……① ただし，$T=A_H-\lambda E=\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1+i \\ 1-i & 3-\lambda \end{bmatrix}$ とおく。

固有方程式 $T=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1+i \\ 1-i & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-(1+i)(1-i)=0$

を解いて，固有値 λ を求める。$6-5\lambda+\lambda^2-(1-\underbrace{i^2}_{-1})=0$

$\lambda^2-5\lambda+4=0 \quad (\lambda-1)(\lambda-4)=0 \quad \therefore \lambda=\underbrace{1}_{\lambda_1},\ \underbrace{4}_{\lambda_2}$

(ⅰ) $\lambda_1=1$ のとき，①を $T_1x_1=0$ そして，$x_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big\}\ r=1$$

$\alpha_1+(1+i)\alpha_2=0$

$\alpha_2=k_1$ とおくと，

$\alpha_1=-(1+i)k_1$

$\therefore x=k_1\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1\neq 0)$

ここで，$k_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと，x_1 は正規化される。よって，これを u_1 とおくと，

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1{}'=\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|x_1{}'\|^2={}^t x_1 \overline{x_1}$
$=[-1-i \quad 1]\begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$
$=(1+i)(1-i)+1\cdot 1$
$=1-i^2+1=3$

$\therefore \|x_1{}'\|=\sqrt{3}$ より，$k_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおけばいい。

(ⅱ) $\lambda_1 = 4$ のとき，①を $T_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$　そして，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -2 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1-i)\beta_1 - \beta_2 = 0$$

$\beta_1 = k_2$ とおくと，

$$\beta_2 = (1-i)k_2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}_2 = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

ここで，$k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_2$ は正規化される。よって，これを $\boldsymbol{u}_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -2 & 1+i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_2{}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\|\boldsymbol{x}_2{}'\|^2 = [1\quad 1-i]\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$$
$$= 1\cdot 1 + (1-i)(1+i)$$
$$= 1 + 1 - i^2 = 3$$

$\therefore\ \|\boldsymbol{x}_2{}'\| = \sqrt{3}$ より，$k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおけばいい。

以上より，ユニタリ行列 U_U を

$U_U = [\boldsymbol{u}_1\quad \boldsymbol{u}_2] = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$ とおくと，エルミート行列 A_H は

$U_U{}^{-1}A_HU_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ と対角化される。 ……………………………………(答)

$U_U{}^{-1}A_HU_U$ を具体的に計算して，答えと一致することを確かめてみよう。

$$\overline{U_U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \qquad \therefore\ U_U{}^{-1} = {}^t\overline{U_U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ U_U{}^{-1}A_HU_U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2-2i+1+i & 2+1-i^2 \\ -(1-i)(1+i)+3 & 1-i+3-3i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1-i & 4 \\ 1 & 4-4i \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (1-i)(1+i)+1 & \cancel{-4+4i}+\cancel{4-4i} \\ \cancel{-1-i}+\cancel{1+i} & 4+4(1-i)(1+i) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1-i^2+1 & 0 \\ 0 & 4+4(1-i^2) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$ となって，OK だね。

演習問題 116　● エルミート行列の対角化(Ⅱ) ●

エルミート行列 $\boldsymbol{A}_H = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2}\,i & 1 \\ -\sqrt{2}\,i & 3 & -\sqrt{2}\,i \\ 1 & \sqrt{2}\,i & 2 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 $\boldsymbol{U}_U$ を用いて，$\boldsymbol{U}_U{}^{-1}\boldsymbol{A}_H\boldsymbol{U}_U$ として対角化せよ。

ヒント！ 固有値に重解が含まれる場合である。重解に対する正規直交系の固有ベクトルを，シュミットの正規直交化法によって求めればいい。

解答＆解説

$\underbrace{\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{A}_H\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})\ \text{と同値}}$ ……①　ただし，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}_H - \lambda\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2}\,i & 1 \\ -\sqrt{2}\,i & 3-\lambda & -\sqrt{2}\,i \\ 1 & \sqrt{2}\,i & 2-\lambda \end{bmatrix}$ とおく。

固有方程式 $|\boldsymbol{T}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2}\,i & 1 \\ -\sqrt{2}\,i & 3-\lambda & -\sqrt{2}\,i \\ 1 & \sqrt{2}\,i & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (3-\lambda)\underbrace{(2-\lambda)^2}_{4-4\lambda+\lambda^2} - 2\underbrace{i^2}_{-1} - 2\underbrace{i^2}_{-1} - (3-\lambda) + 2\underbrace{i^2}_{-1}(2-\lambda) + (2-\lambda)2\underbrace{i^2}_{-1} = 0$$

を解いて，固有値 λ を求める。

$12 - 12\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 3 + \lambda - 4 + 2\lambda - 4 + 2\lambda = 0$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$

$(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\therefore\ \lambda = \underbrace{5}_{\lambda_1},\ \underbrace{1}_{\lambda_2}$ (重解)

組立て除法

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 11 & -5 \\ 1 & & 1 & -6 & 5 \\ \hline & 1 & -6 & 5 & (0) \end{array}$$

(ⅰ) $\lambda_1 = 5$ のとき，①を $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$　そして，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2}\,i & 1 \\ -\sqrt{2}\,i & -2 & -\sqrt{2}\,i \\ 1 & \sqrt{2}\,i & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}\,i & -3 \\ -\sqrt{2}\,i & -2 & -\sqrt{2}\,i \\ -3 & \sqrt{2}\,i & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}\,i & -3 \\ 0 & -4 & -4\sqrt{2}\,i \\ 0 & 4\sqrt{2}\,i & -8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}\,i & -3 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}\,i \\ 0 & \sqrt{2}\,i & -2 \end{bmatrix} \to \left.\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}\,i & -3 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}\,i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} r = 2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \sqrt{2}\,i\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \sqrt{2}\,i\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_3 = k_1$ とおくと，$\alpha_2 = -\sqrt{2}\,ik_1$

$\alpha_1 - 2i^2k_1 - 3k_1 = 0$　より，$\alpha_1 = k_1$

$$\therefore \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} k_1 \\ -\sqrt{2}\,ik_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\,i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1 \neq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1{}' = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|\boldsymbol{x}_1{}'\|^2 = {}^t\boldsymbol{x}_1\overline{\boldsymbol{x}}_1 = [-1 \ \ -\sqrt{2}\,i \ \ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$

$= 1\cdot 1 - \sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{2}\,i + 1\cdot 1 = 4$

$\therefore \|\boldsymbol{x}_1{}'\| = 2$ より，$k_1 = \dfrac{1}{2}$ とおけばいい。

ここで，$k_1 = \dfrac{1}{2}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は正規化される。よって，これを $\boldsymbol{u}_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$$ となる。

$A_H\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{u}_1$ を $\boldsymbol{u}_1$ はみたす。$(\lambda_1 = 5)$

(ii) $\lambda_2 = 1$ (重解) のとき，① を $T_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$　そして，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}\,i & 1 \\ -\sqrt{2}\,i & 2 & -\sqrt{2}\,i \\ 1 & \sqrt{2}\,i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}\,i & 1 \\ -\sqrt{2}\,i & 2 & -\sqrt{2}\,i \\ 1 & \sqrt{2}\,i & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}\,i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \}\, r = 1$$

$\beta_1 + \sqrt{2}\,i\beta_2 + \beta_3 = 0$

$\beta_2 = k_2$，$\beta_3 = k_3$ とおくと，

$\beta_1 = -\sqrt{2}\,ik_2 - k_3$

$$\therefore \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\,ik_2 - k_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = k_2\underbrace{\begin{bmatrix} -\sqrt{2}\,i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_2} + k_3\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_3}$$

この $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立だけれど，

$\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3 = {}^t\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}}_3 = [-\sqrt{2}\,i \ \ 1 \ \ 0]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= -\sqrt{2}\,i\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = \sqrt{2}\,i \neq 0$

より，直交しない。

ここで，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\,i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_2 = k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3$

任意定数 k_2，k_3 の値に対して，この $\boldsymbol{x}_2$ は固有値 $\lambda_2 = 1$ に対する固有ベクトルになる。(ただし，$\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$ より，$(k_2,\ k_3) \neq (0,\ 0)$)

よって，この $\boldsymbol{x}_2 = k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3$ で作られる様々な解ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ のうち，互いに直交する大きさが 1 の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{u}_3$ を選べばよい。

$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$ との内積は,

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = [-\sqrt{2}i \quad 1 \quad 0] \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}i \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{2}i + 0 \cdot 1) = 0$$

$$\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = [-1 \quad 0 \quad 1] \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(-1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2}i + 1 \cdot 1) = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = (k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3) \cdot \boldsymbol{u}_1 = (k_2\boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{u}_1 + (k_3\boldsymbol{a}_3) \cdot \boldsymbol{u}_1$$
$$= k_2\underbrace{(\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)}_{0} + k_3\underbrace{(\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)}_{0} = 0 \quad \text{より,}$$

任意の k_2, k_3 の値に対して, $\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{u}_1$ は直交するね。

すると, この $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ と (i) の $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$ は, 正規直交系をつくるので, ユニタリ行列 U_U を, $U_U = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3]$ とおくことによって,

互いに直交する大きさ 1 のベクトルの集合

エルミート行列 A_H は, $U_U{}^{-1}A_HU_U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と対角化できる。

この $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{u}_3$ を, $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ を用いて, シュミットの正規直交化法により求める。

(ア) $\|\boldsymbol{a}_2\|^2 = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 = [-\sqrt{2}i \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3$ より,

$$\|\boldsymbol{a}_2\| = \sqrt{3} \quad \therefore \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_2\|}\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ かつ $k_3 = 0$ に対応する $\boldsymbol{x}_2$

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_3 + k\boldsymbol{u}_2$ とおくと, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ より, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{u}_2$ となるような $\boldsymbol{b}$ を求めたい。

$(\boldsymbol{a}_3 + k\boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 + k\underbrace{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2}_{\|\boldsymbol{u}_2\|^2 = 1} = 0 \quad \therefore k = -\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2$ より,

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$ となる。

(イ) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3+2 \\ 0+\sqrt{2}i \\ 3+0 \end{bmatrix}$

$\boxed{[-1 \;\; 0 \;\; 1]\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$\therefore \boldsymbol{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 3 \end{bmatrix}$ より，これを正規化して，

$\|\boldsymbol{b}\|^2 = \frac{1}{3}[-1 \;\; \sqrt{2}i \;\; 3] \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{2}i \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}(1+2+9) = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\therefore \|\boldsymbol{b}\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ より，$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{u}_3 = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 3 \end{bmatrix}$ となる。

$k_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\|}\left(-\frac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{a}_2\|}\right)$ かつ $k_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\|}$ に対応する $\boldsymbol{x}_2$

$\boldsymbol{x}_2 = k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3$ は，$T_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$，すなわち
$A_H\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ をみたすから，(ア)(イ) より $\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ はそれぞれ，
$A_H\boldsymbol{u}_2 = \lambda_2\boldsymbol{u}_2$，$A_H\boldsymbol{u}_3 = \lambda_2\boldsymbol{u}_3$ をみたす。($\lambda_2 = 1$ (重解))

以上より，ユニタリ行列 U_U を，

$$U_U = [\boldsymbol{u}_1 \;\; \boldsymbol{u}_2 \;\; \boldsymbol{u}_3]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{6}i & -\sqrt{3} \\ -3\sqrt{2}i & 2\sqrt{3} & \sqrt{6}i \\ 3 & 0 & 3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

とおくと，エルミート行列 A_H は，

$$U_U^{-1}A_HU_U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と対角化される。………………(答)

固有値 λ	$\lambda_1 = 5$	$\lambda_2 = 1$ (重解)	
固有ベクトル $\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 3 \end{bmatrix}$
ユニタリ行列 U_U	$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{6}i & -\sqrt{3} \\ -3\sqrt{2}i & 2\sqrt{3} & \sqrt{6}i \\ 3 & 0 & 3\sqrt{3} \end{bmatrix}$		
対角行列 $U_U^{-1}A_HU_U$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		