演習問題 112　● 留数と留数定理 (Ⅷ) ●

留数定理を用いて，積分路 C (反時計まわり) について，
次の 1 周線積分の値を求めよ。

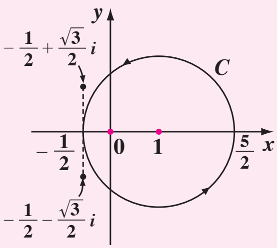
$$\oint_C \frac{1}{z^4(z^3-1)}\,dz \qquad C : |z-1| = \frac{3}{2}$$

ヒント！ C 内部の特異点は $z=0$ と 1 の 2 つであり，これらの留数 R_1 と R_2 をまず求める。次に，留数定理を使えば，$\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^4(z^3-1)}\,dz = 2\pi i(R_1+R_2)$ となる。

解答＆解説

$$f(z) = \frac{1}{z^4(z^3-1)} = \frac{1}{z^4(z-1)(z^2+z+1)}$$ と

おくと，C 内にある特異点は $z=0$ と 1 の 2 つであり，$z=0$ は 4 位の極，$z=1$ は 1 位の極である。よって，それぞれの留数を R_1, R_2 とおいて，これらを求める。



$\left(z^2+z+1=0 \text{ の解は，} z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ である。} \right)$

k 位の極の留数

$$\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left\{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-\alpha)^k f(z)\right\}$$

(ⅰ) $R_1 = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$

$$= \frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 0}\left\{\frac{d^{4-1}}{dz^{4-1}} z^4 f(z)\right\}$$

$$= \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\underline{\frac{d^3}{dz^3}\frac{1}{z^3-1}} \text{ より，}$$

$$\{(z^3-1)^{-1}\}''' = \{-1\cdot(z^3-1)^{-2}\cdot 3z^2\}'' = -3\left\{\frac{z^2}{(z^3-1)^2}\right\}''$$

$$= -3\underline{\left\{\frac{2z\cdot(z^3-1)^2 - z^2\cdot 2(z^3-1)\cdot 3z^2}{(z^3-1)^4}\right\}}' = 6\left\{\frac{2z^4+z}{(z^3-1)^3}\right\}'$$

$$\boxed{\frac{2z(z^3-1)-6z^4}{(z^3-1)^3} = \frac{-4z^4-2z}{(z^3-1)^3} = -2\cdot\frac{2z^4+z}{(z^3-1)^3}}$$

$$R_1 = \frac{1}{6} \times 6 \lim_{z \to 0} \underbrace{\left\{ \frac{2z^4 + z}{(z^3 - 1)^3} \right\}'}$$

$$\frac{(8z^3+1)(z^3-1)^3 - (2z^4+z)\cdot 3(z^3-1)^2 \cdot 3z^2}{(z^3-1)^6}$$

$$8z^6 - 7z^3 - 1 - 18z^6 - 9z^3 = -10z^6 - 16z^3 - 1$$

$$= \frac{(8z^3+1)(z^3-1) - 9z^2(2z^4+z)}{(z^3-1)^4} = -\frac{10z^6+16z^3+1}{(z^3-1)^4}$$

$$\therefore R_1 = -\lim_{z \to 0} \frac{10z^6 + 16z^3 + 1}{(z^3-1)^4} = -\frac{1}{(-1)^4} = -1$$

(ii) $R_2 = \underset{z=1}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z)$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^4(z^2+z+1)} = \frac{1}{1^4 \cdot (1^2+1+1)} = \frac{1}{3}$$

以上 (i), (ii) より，留数定理を用いると，積分路 C についての 1 周線積分の値は，

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{1}{z^4(z^3-1)}\, dz$$

$$= 2\pi i (R_1 + R_2) = 2\pi i \left(-1 + \frac{1}{3} \right)$$

$= -\dfrac{4}{3}\pi i$ である。………………………………………………………(答)