演習問題 29　● エルミート行列の対角化(Ⅱ) ●

エルミート行列 $A_H=\begin{bmatrix} -1 & 2\sqrt{3}\,i \\ -2\sqrt{3}\,i & 3 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 U_U を用いて，

$U_U^{-1}A_HU_U$ として対角化せよ。

ヒント！ まず，固有方程式 $|A_H-\lambda E|=0$ を解いて，固有値 λ_1 と λ_2，およびこれらに対応する，固有ベクトル u_1，u_2 を求めよう。これから，ユニタリ行列 $U_U=[u_1\ u_2]$ を作って，エルミート行列 A_H を対角化すればいいんだんね。この流れをマスターしよう。

解答＆解説

$T=A_H-\lambda E$ とおいて，$Tx=0$ ……① とする。

$T=A_H-\lambda E=\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2\sqrt{3}\,i \\ -2\sqrt{3}\,i & 3-\lambda \end{bmatrix}$ より，固有方程式：

$$|T|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2\sqrt{3}\,i \\ -2\sqrt{3}\,i & 3-\lambda \end{vmatrix}=\underbrace{(-1-\lambda)(3-\lambda)}_{(\lambda+1)(\lambda-3)=\lambda^2-2\lambda-3}-\underbrace{2\sqrt{3}\,i\cdot(-2\sqrt{3}\,i)}_{-4\cdot3\cdot i^2=12}=0 \quad \text{から，}$$

$\lambda^2-2\lambda-15=0 \qquad (\lambda+3)(\lambda-5)=0$

$\therefore \lambda=-3,\ 5$ となる。(ここで，$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=5$ とおく。)

(i) $\lambda_1=-3$ のとき，①を $Tx_1=0$，そして，$x_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{3}\,i \\ -2\sqrt{3}\,i & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}\,i \\ -\sqrt{3}\,i & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}\,i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big\}r=1$$

よって，$\alpha_1+\sqrt{3}\,i\cdot\alpha_2=0$ より，

$\alpha_2=k_1$ とおくと，

$\alpha_1=-\sqrt{3}\,i\cdot k_1$ となる。

よって，$x_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} -\sqrt{3}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$

ここで，$k_1=\dfrac{1}{2}$ とおくと，x_1 は正規化される。これを u_1 とおくと，

ここで，$x_1'=\begin{bmatrix} -\sqrt{3}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|x_1'\|^2=x_1'\cdot x_1'={}^t x_1'\cdot\overline{x_1'}$
$=-\sqrt{3}\,i\cdot\sqrt{3}\,i+1^2=3+1=4$

$\therefore \|x_1'\|=2$ より，$k_1=\dfrac{1}{2}$ とおくと，

x_1 は正規化されて，u_1 となる。

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3}\,i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ②$$ となる。

(ii) $\lambda_2 = 5$ のとき，①を $T\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$，そして，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -6 & 2\sqrt{3}\,i \\ -2\sqrt{3}\,i & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}\,i & 1 \\ -3 & \sqrt{3}\,i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{3}\,i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big\} r=1$$

よって，$\sqrt{3}\,i \cdot \beta_1 + \beta_2 = 0$ より，

$\beta_1 = k_2$ とおくと，

$\beta_2 = -\sqrt{3}\,i \cdot k_2$ となる。

よって，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}\,i \end{bmatrix}$

ここで，$k_2 = \frac{1}{2}$ とおくと $\boldsymbol{x}_2$ は，

正規化される。これを $\boldsymbol{u}_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}\,i \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ③$$ となる。

ここで，$\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}\,i \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|\boldsymbol{x}_2'\|^2 = \boldsymbol{x}_2' \cdot \boldsymbol{x}_2' = {}^t\boldsymbol{x}_2' \cdot \overline{\boldsymbol{x}_2'}$
$= 1^2 - \sqrt{3}\,i \cdot \sqrt{3}\,i = 1 + 3 = 4$

$\therefore \|\boldsymbol{x}_2'\| = 2$ より，$k_2 = \frac{1}{2}$ とおくと，

$\boldsymbol{x}_2$ は正規化されて，$\boldsymbol{u}_2$ となる。

以上 (i)(ii) の②，③より，ユニタリ行列 U_U を

$$U_U = [\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3}\,i & 1 \\ 1 & -\sqrt{3}\,i \end{bmatrix}$$ とおくと，

エルミート行列 $A_H = \begin{bmatrix} -1 & 2\sqrt{3}\,i \\ -2\sqrt{3}\,i & 3 \end{bmatrix}$ は $U_U{}^{-1}A_H U_U$ により，

$$U_U{}^{-1}A_H U_U = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$ と対角化できる。……………………………………(答)

参考

$$U_U{}^{-1} = {}^t\overline{U_U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3}\,i & 1 \\ 1 & \sqrt{3}\,i \end{bmatrix}$$ より，

$$U_U{}^{-1}A_H U_U = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3}\,i & 1 \\ 1 & \sqrt{3}\,i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2\sqrt{3}\,i \\ -2\sqrt{3}\,i & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{3}\,i & 1 \\ 1 & -\sqrt{3}\,i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3\sqrt{3}\,i & -3 \\ 5 & 5\sqrt{3}\,i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{3}\,i & 1 \\ 1 & -\sqrt{3}\,i \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

と確認できる。