演習問題 143　● 曲面の面積(Ⅳ) ●

曲面 $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ （領域 D：$0 \leqq x$，$0 \leqq y$，$2x + y \leqq 4$）の面積 S を求めよ。

ヒント！ 曲面の面積公式：$S = \iint_D \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dxdy$ を用いて求めよう。2 重積分をキチンと計算することがポイントになるんだね。

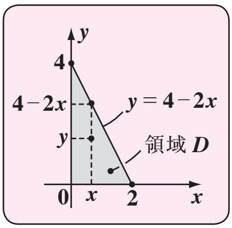
解答＆解説

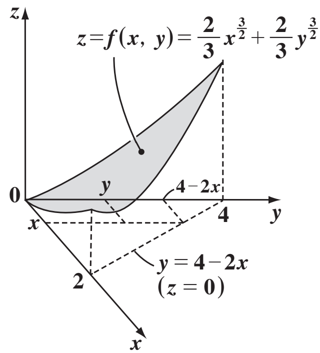
曲面 $z = f(x,\ y) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ ……①の

領域 D：$0 \leqq x$，$0 \leqq y$，

$2x + y \leqq 4$

における面積を S とおき，これを求める。





$\cdot f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ……………②

$\cdot f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$ ……③より，

②，③を曲面 S を求める公式に代入すると，

$$S = \iint_D \sqrt{\underbrace{f_x{}^2 + f_y{}^2}_{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 = x + y} + 1}\,dxdy$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} \sqrt{x + y + 1}\,dy \right) dx \text{ となる。}$$

$\sqrt{y + \underbrace{x+1}_{}} = (y + \underbrace{x+1}_{\text{まず定数扱い}})^{\frac{1}{2}}$

上図より，
(i) x は，区間 $[0,\ 2]$ を動く。
(ii) x が区間 $[0,\ 2]$ におけるある値をとるとき，y は区間 $[0,\ 4-2x]$ を動く。

よって，この 2 重積分を求めると，

$$S=\int_0^2\Bigl(\underbrace{\int_0^{4-2x}(y+x+1)^{\frac{1}{2}}dy}\Bigr)dx$$

$$\frac{2}{3}\Bigl[(\underline{\underline{y}}+x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigr]_0^{4-2x}$$
$$=\frac{2}{3}\Bigl\{(\underline{\underline{4-2x}}+x+1)^{\frac{3}{2}}-(\underline{\underline{0}}+x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigr\}$$
$$=\frac{2}{3}\Bigl\{(5-x)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigr\}$$

$$\Bigl\{(y+\underbrace{x+1}_{\text{定数扱い}})^{\frac{3}{2}}\Bigr\}'=\frac{3}{2}(y+x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^2\Bigl\{(5-x)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigr\}dx$$

$$=\frac{2}{3}\Bigl\{\underbrace{\int_0^2(5-x)^{\frac{3}{2}}dx}-\underbrace{\int_0^2(x+1)^{\frac{3}{2}}dx}\Bigr\}$$

$$-\frac{2}{5}\Bigl[(5-x)^{\frac{5}{2}}\Bigr]_0^2=-\frac{2}{5}\Bigl(3^{\frac{5}{2}}-5^{\frac{5}{2}}\Bigr)=\frac{2}{5}(25\sqrt{5}-9\sqrt{3})$$

$$\frac{2}{5}\Bigl[(x+1)^{\frac{5}{2}}\Bigr]_0^2=\frac{2}{5}\Bigl(3^{\frac{5}{2}}-1^{\frac{5}{2}}\Bigr)=\frac{2}{5}(9\sqrt{3}-1)$$

$$\cdot\Bigl\{(5-x)^{\frac{5}{2}}\Bigr\}'=\frac{5}{2}(5-x)^{\frac{3}{2}}\cdot(-1)$$
$$\cdot\Bigl\{(x+1)^{\frac{5}{2}}\Bigr\}'=\frac{5}{2}(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\Bigl\{\frac{2}{5}(25\sqrt{5}-9\sqrt{3})-\frac{2}{5}(9\sqrt{3}-1)\Bigr\}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(25\sqrt{5}-9\sqrt{3}-9\sqrt{3}+1)$$ となる。

∴求める領域 D における曲面 $z=f(x,\ y)$ の面積 S は,

$$S=\frac{4}{15}(25\sqrt{5}-18\sqrt{3}+1)$$ である。 ……………………………………(答)