Appendix（付録）　●解析力学入門●　methods & formulae

“**解析力学**”(***analytical mechanics***)では，ニュートンの運動方程式の代わりに，次に示す“**ラグランジュの運動方程式**”(***Lagrange's equation of motion***)が利用される。

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*a) \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \underbrace{f}_{\text{自由度}})$$

ただし，L：ラグランジアン，q_i：一般化座標，t：時刻

$L=T-U$　(T：運動エネルギー，U：ポテンシャルエネルギー)

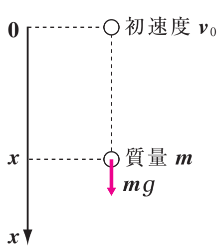
たとえば，右図のような質量 m の質点の自由落下運動においては，当然，自由度 $f=1$ で，一般化座標 $q_i=x$ とおける。ここで

$$\begin{cases} \text{運動エネルギー}：T=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ \text{ポテンシャルエネルギー}：U=-mgx \end{cases}$$ より

ラグランジアン $L=T-U=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+mgx$

よって，この運動のラグランジュの運動方程式は，

質点の自由落下



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots①$$ と表される。ここで，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}}\Big(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\underbrace{mgx}_{\text{定数扱い}}\Big)=\dfrac{1}{2}m\cdot 2\dot{x}=m\dot{x} \quad \cdots\cdots② \\ \dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{定数扱い}}+mgx\Big)=mg \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$$ より，

②，③を①に代入して，

$\dfrac{d}{dt}(m\dot{x})-mg=0$　　$m\ddot{x}=mg$ となって，ニュートンの運動方程式を導くことができる。つまりラグランジュの運動方程式とニュートンの運動方程式は等価であると言える。

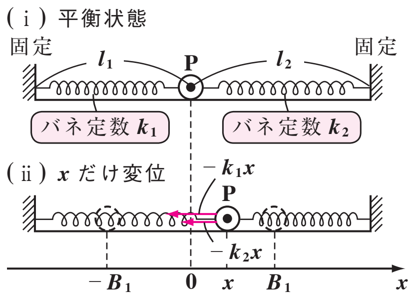
演習問題 114　● ラグランジュの運動方程式（Ⅰ）●

自然長が l_1, l_2, バネ定数が k_1, k_2 の 2 本のバネがある。質量 m の質点 P の両側にこの 2 本のバネの一端を結び付けたものを，滑らかな水平面上に置き，さらに 2 本のバネの他端を壁に固定した。平衡状態の P の位置を原点 0，水平右向きに x 軸をとる。この状態から P を右方向に B_1 だけずらして，静かに手を離した後の運動は，ラグランジュの方程式：
$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$ ……(*) で表される。これから，ニュートンの運動方程式：$\ddot{x}=-\omega^2 x$ ……(*)´ $\left(\omega=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}\right)$ を導け。

ヒント！ これは演習問題 53(P86) と同じ条件の問題である。

解答＆解説

平衡状態から x だけずれた位置に P があるとき，



$$\begin{cases} \text{運動エネルギー}：T=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ \text{ポテンシャルエネルギー}：U=\dfrac{1}{2}k_1x^2+\dfrac{1}{2}k_2x^2 \end{cases}$$

よって，ラグランジアン $L(=T-U)$ は，

$L=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2-\dfrac{k_1+k_2}{2}x^2$ となる。

この運動のラグランジュの運動方程式は，

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$ ……(*) と表される。ここで，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}}\Bigl(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2-\underbrace{\dfrac{k_1+k_2}{2}x^2}_{\text{定数扱い}}\Bigr)=m\dot{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ \dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(\underbrace{\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{定数扱い}}-\dfrac{k_1+k_2}{2}x^2\Bigr)=-(k_1+k_2)x \quad \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②を (*) に代入して，$m\ddot{x}+(k_1+k_2)x=0$　よって，ニュートンの運動方程式：$\ddot{x}=-\omega^2x$ …(*)´ $\left(\omega=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}\right)$ が導ける。…………(終)

演習問題 115　● ラグランジュの運動方程式（Ⅱ）●

質量を無視できる長さ l の軽い糸の上端 **O** を天井に固定し，下端に質量 m の重り **P** を付けて単振り子を作る。この単振り子の振れ角 θ が十分に小さいとき，この運動はラグランジュの方程式：

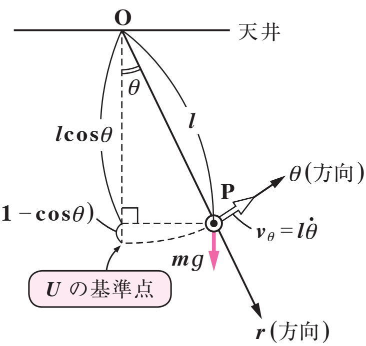
$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ……(＊) で表される。これから，

ニュートンの運動方程式：$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ ……(＊)´ $\left(\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$ を導け。

ヒント！ これは演習問題 **55(P88)** と同じ条件の単振り子の問題である。演習問題 **55** では，x 軸方向と y 軸方向の **2** つの成分 (自由度 $f = 2$) の運動方程式から (＊)´ を導いたけれど，極座標においては，単振り子は $r = l$ (一定) で，r 方向の運動方程式を立てる必要がなく，θ 方向の運動のみ (自由度 $f = 1$) を考えればいい。

解答＆解説

質点 **P** が，鉛直下向きより十分小さな角 θ だけ振れた位置にあるとき，



運動エネルギー：$T = \dfrac{1}{2}m\underbrace{v_\theta{}^2}_{(l\dot{\theta})^2}$

$= \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

$r = l$ (一定) より，r 方向の速度成分 $v_r = \dot{r} = 0$ となるので，$\dfrac{1}{2}mv_r{}^2 = 0$ より，θ 方向の運動エネルギーのみを考えればいい。

ポテンシャルエネルギー：$U = mgl(1 - \cos\theta)$

よって，ラグランジアン $L (= T - U)$ は，

$L = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$ ……① となる。

よって，①の L を用いると，

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)\cdots\cdots①$$

ラグランジュの運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\quad\cdots\cdots(*)$$ となる。ここで，

r についてのラグランジュの方程式も $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$ と表されるが，L が θ と $\dot{\theta}$ のみの関数で，r と $\dot{r}$ を独立変数にもたないので，この方程式の右辺は恒等的に 0 となる。つまり，方程式の意味がないんだね。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\dfrac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\Big\{\underbrace{\dfrac{1}{2}ml^2}_{\text{定数扱い}}\dot{\theta}^2-\underbrace{mgl(1-\cos\theta)}\Big\}=ml^2\dot{\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \\ \dfrac{\partial L}{\partial\theta}=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big\{\underbrace{\dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}_{\text{定数扱い}}-\underbrace{mgl}(1-\cos\theta)\Big\}=-mgl\sin\theta\quad\cdots\cdots③\end{cases}$$

②，③を $(*)$ に代入して，

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{ml^2}_{\text{定数}}\dot{\theta})+mgl\sin\theta=0$$ より，$$\cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\theta}=-\cancel{m}g\cancel{l}\sin\theta$$

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$ ここで，$\theta\fallingdotseq 0$ より，近似的に $\sin\theta\fallingdotseq\theta$ と表せる。

よって，$\frac{g}{l}=\omega^2$ とおくと，ニュートンの運動方程式

$$\ddot{\theta}=-\omega^2\theta\quad\cdots\cdots(*)'\quad\left(\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$ が導かれる。……………………………(終)

演習問題 **55** のときのように，糸の張力 S など一切考慮せずに，機械的に $(*)'$ を導けるところが，ラグランジュの運動方程式の大きな長所と言える。さらに，変数 x の代わりに θ となっても，ラグランジュの方程式は，

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$ の代わりに $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$ となるだけで，形式的にまったく同じ方程式で表される。これも大きな利点の 1 つであり，これから，公式として，変数 x や θ の代わりに一般化座標 q_i で表すことができるんだね。