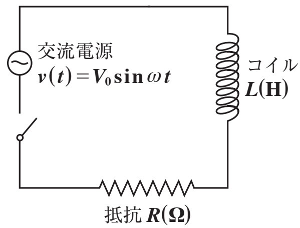
演習問題 108　● 交流電源に対する *RL* 回路 ●

右図に示すように，自己インダクタンス L(H) のコイルと，R(Ω) の抵抗を直列につないだものを起電力 $v(t)=V_0\sin\omega t$ の交流電源に接続し，時刻 $t=0$ でスイッチを閉じた。このとき，この回路に流れる電流 $i(t)$ を求めよ。ただし，L，R，V_0，ω は正の定数とする。



(RL 交流回路)

ヒント！ この回路について，(起電力)＝(電圧降下) の方程式は，$V_0\sin\omega t - L\dfrac{di(t)}{dt} = R\cdot i(t)$ となる。よって，この両辺をラプラス変換し，$\mathcal{L}[i(t)]=I(s)$ とおいて，$I(s)$ を s の式で表し，これをラプラス逆変換して，電流 $i(t)$ を求めればいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

この閉回路について，(起電力)＝(電圧降下) の方程式は，

$$V_0\sin\omega t - \underbrace{L\cdot\frac{di(t)}{dt}}_{\text{コイルによる逆起電力}} = R\cdot i(t) \quad \cdots\cdots① \text{ となる。}$$

ここで，電流 $i(t)$ のラプラス変換を，$\mathcal{L}[i(t)]=I(s)$ とおく。

①の両辺をラプラス変換して，

$$V_0\underbrace{\mathcal{L}[\sin\omega t]}_{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}} - L\underbrace{\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right]}_{sI(s)-\underbrace{\cancel{i(0)}}_{0}} = R\underbrace{\mathcal{L}[i(t)]}_{I(s)}$$

公式
・$\mathcal{L}[\sin at] = \dfrac{a}{s^2+a^2}$
・$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s)-y(0)$

$$\frac{V_0\omega}{s^2+\omega^2} - Ls\cdot I(s) = R\cdot I(s), \qquad I(s) = \frac{V_0\omega}{(Ls+R)(s^2+\omega^2)}$$

$$\therefore\ I(s) = \underbrace{\frac{V_0\omega}{L}}_{\text{定数}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(s+\dfrac{R}{L}\right)(s^2+\omega^2)}}_{\text{部分分数に分解}} \quad \cdots\cdots② \text{ となる。}$$

$$\frac{1}{\left(s+\frac{R}{L}\right)(s^2+\omega^2)}=\frac{a}{s+\frac{R}{L}}+\frac{bs+c}{s^2+\omega^2}$$ とおいて，両辺の分子を比較すると，

$$1=a(s^2+\omega^2)+\left(s+\frac{R}{L}\right)(bs+c)=as^2+a\omega^2+bs^2+\left(c+\frac{R}{L}b\right)s+\frac{R}{L}c$$

$$=\underbrace{(a+b)}_{0}s^2+\underbrace{\left(c+\frac{R}{L}b\right)}_{0}s+\underbrace{\omega^2a+\frac{R}{L}c}_{1}$$ より，

$a+b=0$ ……㋐，$c+\frac{R}{L}b=0$ ……㋑，$\omega^2a+\frac{R}{L}c=1$ ……㋒　となる。

㋐より $b=-a$ ……㋐´　　㋐´を㋑に代入して，$c=\frac{R}{L}a$ ……㋑´

㋑´を㋒に代入して，$\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)a=1$　　$\therefore a=\frac{L^2}{L^2\omega^2+R^2}$ ……㋒´

㋒´を㋐´，㋑´に代入して，$b=-\frac{L^2}{L^2\omega^2+R^2}$，$c=\frac{LR}{L^2\omega^2+R^2}$　となる。

②より，

$$I(s)=\frac{V_0\omega}{\cancel{L}}\cdot\frac{\cancel{L}}{L^2\omega^2+R^2}\left(\frac{L}{s+\frac{R}{L}}+\frac{-Ls+R}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$\therefore I(s)=\frac{V_0\omega}{L^2\omega^2+R^2}\left(L\cdot\frac{1}{s+\frac{R}{L}}-L\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}+\frac{R}{\omega}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$ ……③　となる。

公式
・$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$
・$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at$

よって，③の両辺をラプラス逆変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[I(s)]}_{i(t)}=\frac{V_0\omega}{L^2\omega^2+R^2}\left\{L\cdot\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right]}_{e^{-\frac{R}{L}t}}-L\cdot\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]}_{\cos\omega t}+\frac{R}{\omega}\cdot\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]}_{\sin\omega t}\right\}$$

$$\therefore i(t)=\frac{V_0}{L^2\omega^2+R^2}\left(L\omega e^{-\frac{R}{L}t}-L\omega\cos\omega t+R\sin\omega t\right)$$ となる。……………(答)