◆◆ Appendix(付録) ◆◆

§1. マルコフ過程入門

時刻と共に，確率分布が変化していく確率過程として，“**マルコフ過程**”(*Markov process*)(または，“**マルコフ連鎖**”(*Markov chain*))がある。これについて，その基本を教えよう。

ここでは，例題を分かりやすくするために，確率分布の経時変化ではなく，ある町の **10000** 世帯における **A** 社と **B** 社の洗剤の利用世帯数の経時変化について解説しよう。

● 2社の洗剤の利用状況の変化を調べよう！

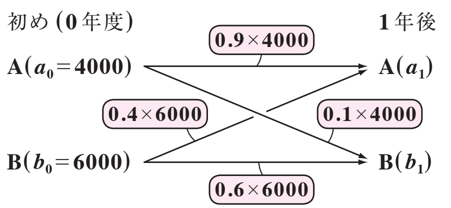
ある町の **10000** 世帯において，初め **A** 社の洗剤を使っているのは $a_0 = 4000$ 世帯であり，**B** 社の洗剤を使っているのは $b_0 = 6000$ 世帯であった。そして，**1** 年後，

(i) **A**社の洗剤を使っていた世帯の **0.9**(=**90**%) は **A**社のものをそのまま使い，**0.1**(=**10**%) の世帯は **B**社のものを使うようになる。また，

(ii) **B**社の洗剤を使っていた世帯の **0.6**(=**60**%) は **B**社のものをそのまま使い，**0.4**(=**40**%) の世帯は **A** 社のものを使うようになるものとする。

ここで，**1** 年後，**A**社と **B**社の洗剤(以降，洗剤 **A**，洗剤 **B** と表す。)の利用世帯数をそれぞれ a_1，b_1 とおく。そして図 **1** の模式図を使って，この a_1 と b_1 を算出すると，次のようになるんだね。

図 **1**　**A** 社と **B** 社の洗剤の利用世帯の変化



$$\begin{cases} a_1 = 0.9 \times a_0 + 0.4 \times b_0 & \cdots\cdots ① \\ b_1 = 0.1 \times a_0 + 0.6 \times b_0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

具体的には，
$a_1 = 0.9 \times 4000 + 0.4 \times 6000 = 6000$
$b_1 = 0.1 \times 4000 + 0.6 \times 6000 = 4000$
となって，変化していることが分かる。

①，②を，行列とベクトルの形でまとめると，

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9a_0 + 0.4b_0 \\ 0.1a_0 + 0.6b_0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}}_{\text{推移確率 } M} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \cdots\cdots ③$$

となる。

ここで，③の $\mathbf{2}$ 行 $\mathbf{2}$ 列の行列 $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$ を M とおこう。この行列 M は，“**推移確率行列**”(すいいかくりつ)(***transition probability matrix***) と呼ばれ，マルコフ過程で重要な役割を演じる行列なんだね。ここで，$M = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$ について，

(ⅰ) 第 **1** 列の $\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ は，洗剤 **A** を使っている世帯が **1** 年後に洗剤 **A** と洗剤 **B** を使っている世帯にそれぞれなる確率を表し，これらの和は $0.9 + 0.1 = 1$ (全確率) となる。また，

(ⅱ) 第 **2** 列の $\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ は，洗剤 **B** を使っている世帯が **1** 年後に洗剤 **A** と洗剤 **B** を使っている世帯にそれぞれなる確率を表し，これらの和も $0.4 + 0.6 = 1$ (全確率) となるんだね。

そして，マルコフ過程では，この推移確率行列 M の各要素は，時刻に対して不変であるものとする。よって，③で示す **0** 年度と **1** 年後の関係式を一般化して，n 年後の洗剤 **A, B** の利用世帯数 a_n, b_n と $n+1$ 年後の洗剤 **A, B** の利用世帯数 a_{n+1}, b_{n+1} の関係式として，次のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \cdots\cdots(*1) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

よって，これから，n 年後の洗剤 **A, B** の利用世帯数 a_n, b_n は，初めの利用世帯数 a_0, b_0 を用いて，次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(*2) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(*1) を
$F(n+1) = M \cdot F(n)$ の
形の漸化式と考えると，
$F(n) = M^n \cdot F(0)$
すなわち，
$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$
と変形することができる。

具体的に計算してみよう。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 \\ 6000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = M^2 \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = M^3 \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7000 \\ 3000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7500 \\ 2500 \end{bmatrix}$$

………………………………………………………………

となって，洗剤Aと洗剤Bを使っている世帯数の経時変化の様子を調べることができるんだね。

では，$n=1, 2, 3, \cdots$と，この確率過程によって，洗剤Aと洗剤Bを使用する世帯数の変化が進んで行って，最終的にどうなるのか？知りたいって？！
良い質問だね。この正式な解答は，

$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ ……$(*2)$ の両辺の $n \to \infty$ の極限を求めればいいんだね。

つまり，

$$\begin{cases} ((*2)\text{の左辺の極限}) = \lim_{n \to \infty} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{bmatrix} \\ ((*2)\text{の右辺の極限}) = \lim_{n \to \infty} M^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = M^\infty \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \end{cases}$$ より，

$\begin{bmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{bmatrix} = M^\infty \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ となるので，M^n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を求めて，

$n \to \infty$ の極限の行列 M^∞ を求めればいいことになるんだね。

しかし，ここでは n が十分に大きくなれば，$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$ は変化しない定常状態になると考えて，これを $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ とおくと $(*1)$ の式から，

$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ……④　が成り立つはずなんだね。よって④を変形して，

$$\underbrace{E}_{\text{単位行列}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \underbrace{(M-E)}_{\begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.4 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -0.1 & 0.4 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore -0.1\alpha + 0.4\beta = 0$　（もう1つの式：$0.1\alpha - 0.4\beta = 0$ は，左の式と同じ式だね。）

よって，$\alpha = 4\beta$ ……⑤かつ，$\alpha + \beta = 10000$ ……⑥ ← αとβの和が1万世帯であることは，変化しない。

⑤，⑥より $\alpha = 8000$，$\beta = 2000$ が導ける。

これは，$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 6000 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 3000 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7500 \\ 2500 \end{bmatrix}$，…

となって，$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$ に近づいていっていることが分かる。