演習問題 57　● 重積分（Ⅱ）●

次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos y}dxdy$　　(2) $\displaystyle\int_1^2\int_0^1\log(x+y)dxdy$

ヒント！ (1) は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos y}dy$ の形に変形できるので，x と y での積分計算を個別に行って，積を求めればよい。(2) では，$\log x$ の積分公式 $\displaystyle\int\log xdx = x\log x - x + C$ に加えて，$\log(x+a)$ （a：定数）の積分公式 $\displaystyle\int\log(x+a)dx = (x+a)\log(x+a) - x + C$ を利用するといい。

解答＆解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos y}dx\right)dy = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx}_{(\mathrm{i})}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos y}dy}_{(\mathrm{ii})}$ …①と変形できる。ここで，

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cdot\cos xdx$

ここで，$\sin x = t$ とおくと，$x:0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$t:0\to 1$ ← $\displaystyle\int f(\sin x)\cdot\cos xdx$ のとき $\sin x = t$ とおく。

また，$\cos xdx = dt$ より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx = \int_0^1\underbrace{(1-t^2)}_{(1-\sin^2 x)}\underbrace{dt}_{\cos xdx} = \left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\quad\cdots②\ \text{となる。}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos y}dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\cos ydy = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1-\sin^2 y}\cos ydy$

ここで，$\sin y = t$ とおくと，$x:0\to\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$t:0\to\dfrac{1}{2}$

また，$\cos ydy = dt$ より，　　$\dfrac{1}{(1-t)(1+t)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}\right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos y}dy = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t)(1+t)}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log(1+t)-\log(1-t)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big\{\underbrace{\log\frac{3}{2}-\log\frac{1}{2}}_{}-(\cancel{\log 1}-\cancel{\log 1})\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\log 3\quad\cdots\cdots③$$

$\log\dfrac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \log 3$

②，③を①に代入して，

$$与式 = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx}_{\frac{2}{3}\ (\text{②より})}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos y}\,dy}_{\frac{1}{2}\log 3\ (\text{③より})} = \frac{\cancel{2}}{3}\times\frac{1}{\cancel{2}}\log 3 = \frac{1}{3}\log 3 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\log(x+a)$ (a：定数) の不定積分 $\int\log(x+a)dx$ は，

$$\int\log(x+a)dx = (x+a)\cdot\log(x+a) - x + C \quad\cdots(*)$$

である。これを用いると，

$\because \{(x+a)\cdot\log(x+a)-x\}'$

$= 1\cdot\log(x+a) + \cancel{(x+a)}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x+a}} - 1$

$= \log(x+a)\cancel{+1}\cancel{-1}$

$= \log(x+a)$

まず，定数扱い　x で積分

$$\int_1^2\Big\{\underbrace{\int_0^1\log(x+y)\,dx}\Big\}dy$$

$[(x+y)\cdot\log(x+y)-x]_0^1$　(($*$) の積分公式より)

$= (1+y)\log(1+y) - 1 - (y\log y \cancel{-0}) = (y+1)\log(y+1) - y\log y - 1$

$$= \underbrace{\int_1^2(y+1)\log(y+1)dy} - \underbrace{\int_1^2 y\log y\,dy} - \underbrace{\int_1^2 dy}$$

$y+1=t$ とおくと，$y：1\to2$ のとき，$t：2\to3$　また，$dy=dt$ より，

$\displaystyle\int_2^3 t\cdot\log t\,dt = \int_2^3\left(\frac{1}{2}t^2\right)'\log t\,dt$

$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}t^2\log t\right]_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 t^2\cdot\frac{1}{t}dt$

$\displaystyle= \frac{9}{2}\log 3 - 2\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_2^3$

$\displaystyle= \frac{9}{2}\log 3 - 2\log 2 - \frac{1}{4}(9-4)$

$\displaystyle\int_1^2\left(\frac{1}{2}y^2\right)'\log y\,dy$ ←部分積分

$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}y^2\log y\right]_1^2 - \int_1^2\frac{1}{2}y^2\cdot\frac{1}{y}dy$

$\displaystyle= 2\log 2 - \cancel{\frac{1}{2}\log 1} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^2$

$\displaystyle= 2\log 2 - \frac{1}{4}(4-1) = 2\log 2 - \frac{3}{4}$

$[y]_1^2 = 2-1 = 1$

$$= \frac{9}{2}\log 3 - 2\log 2 - \frac{5}{4} - \left(2\log 2 - \frac{3}{4}\right) - 1$$

$$= \frac{9}{2}\log 3 - 4\log 2 - \frac{3}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$