Appendix （付録）

解析力学入門

力学の講義でも，**解析力学**(*analytical mechanics*)まで踏み込んで解説される先生もいらっしゃると思うので，本書でも，解析力学について，その基本を簡単に解説しておこう。

解析力学とは，これまで学んだニュートン力学を数学的により洗練された運動方程式で表現する力学のことなんだ。具体的には，ニュートンの運動方程式の代わりに，"**ラグランジュの運動方程式**"や"**ハミルトンの正準方程式**"を使って，様々な運動を記述するんだね。ここでは，解析力学入門ということで，これら**2**つの方程式の基本的な利用法を中心に解説していこう。

● ラグランジュの運動方程式を紹介しよう！

まず，ここで，"**ニュートンの運動方程式**"と"**ラグランジュの運動方程式**"(*Lagrange's equation of motion*)を対比して示そう。

(Ⅰ)ニュートンの運動方程式：

$$m_i\ddot{x}_i = f_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*1) \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, f)$$

(Ⅱ)ラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \cdots\cdots(*2) \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, f)$$

(x_i や q_i：座標，L：ラグランジアン，f：自由度)

(Ⅰ)のニュートンの運動方程式の方の意味は大丈夫だね。(Ⅱ)のラグランジュの運動方程式については，まだ意味はよく分からなくても，意外とスッキリした形をしていると思われたはずだ。ここで，(Ⅰ)と(Ⅱ)は等価な方程式であることを，後に示すことにして，まず，この**2**つに共通な $i = 1, 2, \cdots, f$ の，f について解説しておこう。この f は**自由度**と呼ばれる自然数のことなんだ。たとえば，**1** 質点の **2** 次元運動では，自由度 $f = 2$ となるし，**2** 質点の **3** 次元運動では，自由度 $f = 2 \times 3 = 6$ となるんだね。

つまり，自由度 f とは，運動を記述するのに必要な未知の座標の数のことであり，同時に，それを求めるのに必要な運動方程式の数のことでもあるんだね。従って，(Ⅰ)，(Ⅱ) 共に，自由度 f の運動方程式を表しているんだね。

では，もう **1** 度，ラグランジュの運動方程式を下に示して，各記号の意味を解説していこう。

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad \cdots\cdots(*2) \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \underbrace{f}_{\text{自由度}})$$

（ただし，L：ラグランジアン，q_i：一般化座標，t：時刻
$L=K-U$ （K：運動エネルギー，U：ポテンシャルエネルギー））

まず，(*2) は，自由度 f の方程式なので，$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ f$ に対応して，具体的には，次の f 個の方程式を表していることに気を付けよう。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0\ ,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_3}=0\ ,\quad \cdots\cdots,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_f}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_f}=0$$

そして，ラグランジアン L は，$L=\underbrace{K}_{\text{運動エネルギー}}-\underbrace{U}_{\text{ポテンシャルエネルギー}}$ で定義される関数なんだ。この L は，(全) 力学的エネルギー $E=K+U$ と対比して覚えると忘れないと思う。E と同様，L はスカラー量なんだね。次に，時刻が t で表されていることは問題ないと思う。

意味が分かりづらいのは，“**一般化座標**”（いっぱんかざひょう）$\underbrace{q_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ f)}_{\text{具体的には，}q_1,\ q_2,\ q_3,\ \cdots,\ q_f\text{ のこと}}$ だろうね。

これは，たとえば，**2** 質点の **2** 次元運動の座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とおいたとき，これは自由度 $f=4$ の問題なので，一般化座標 $q_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を，$q_1=x_1$，$q_2=y_1$，$q_3=x_2$，$q_4=y_2$ とおけばいい。でも，これを単なる変数の置き換えと思ってはいけないよ。同じ **2** 質点の **2** 次元運動

ラグランジュの運動方程式
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad \cdots(*2)$$

が極座標で(r_1, θ_1)，(r_2, θ_2)と表されるときも，$q_1=r_1$，$q_2=\theta_1$，$q_3=r_2$，$q_4=\theta_2$とおけるし，その他，球座標でも，さらにそれ以外の座標表示であっても，質点の位置を指定できるものであれば，何でも，このように，$q_1, q_2, \cdots, q_f$と置き換えて，なおかつ同じ形の$(*2)$のf個のラグランジュの運動方程式で，運動を記述することができるんだ。このように汎用性（はんようせい）の高い変数だから，この$q_i\ (i=1, 2, \cdots, f)$のことを一般化座標というんだね。

また，一般に物理学では，時間微分した変数に“・”(ドット)を使って表示することが多い。ここでも，$\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}\ (i=1, 2, \cdots, f)$，すなわち$\dot{q}_i$は一般化座標$q_i$を時刻$t$で微分したもの(時間微分)であることも頭に入れておこう。

そして，ラグランジアン$L=K-U$は，一般に，$q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f$の関数，つまり，$L=L(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f)$の多変数関数として表されるので，$(*2)$に示すように，$L$は，$q_i$や$\dot{q}_i\ (i=1, 2, \cdots, f)$で偏微分することができるんだね。

以上が，ラグランジュの運動方程式についての基礎知識だ。ン？でも，どのようにして，ラグランジュの運動方程式$(*2)$が導かれるのか？知りたいって!? …，残念ながら，この導出はかなり本格的な解説が必要となるので，ここではできない。申し訳ない **m(_ _)m**

ここでは，ラグランジュの運動方程式は与えられたものとして，これがニュートンの運動方程式と等価(同じもの)であることを，これから，いくつかの例を使って示していくつもりだ。エッ？ニュートンの運動方程式と同じものであるのなら，何故ラグランジュの運動方程式をもち出す必要があるのかって!? …，当然の疑問だね。その理由は，いくつかあるんだけれど，その中の1つとして，ニュートンの運動方程式よりも，慣れればラグランジュの運動方程式で運動を記述する方が，同じ形の方程式で機械的に表すことができるからなんだね。これから，具体例を示そう。

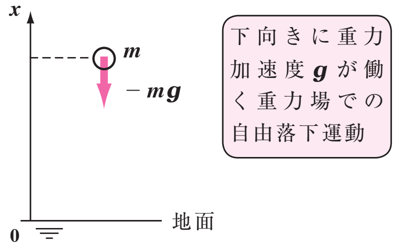
● 自由落下運動から始めよう！

まず，P40 で解説した自由落下運動を例にとってみよう。図 1 のような座標系をとれば，1 つの質点の 1 次元運動なので，この自由度は当然 $f=1$ で，ニュートンの運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -mg \quad \cdots\cdots ①$$

と表されることは大丈夫だね。

図 1　自由落下運動



では，このラグランジュの運動方程式 $(*2)$ から，この①を導いてみよう。まず，ラグランジアン L は，$L = \underbrace{K}_{\frac{1}{2}m\dot{x}^2} - \underbrace{U}_{mgx}$ より，

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \quad \cdots\cdots ②$$ となる。

ここで，$f=1$ より，一般化座標は，q_1 のみだけれど，$q_1 = x$ のことなので，ここではそのまま x を用いた。

②を，x と $\dot{x}$ でそれぞれ偏微分すると，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{}m\dot{x}^2 - \underbrace{\cancel{mgx}}_{\text{定数扱い}}\right) = \frac{1}{2}m \cdot 2\dot{x} = m\dot{x} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\cancel{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}}_{\text{定数扱い}} - \underbrace{mgx}_{}\right) = -mg \cdot 1 = -mg \quad \cdots\cdots ④$$

L は x と $\dot{x}$ の 2 変数関数より，x と $\dot{x}$ により独立に偏微分できる。

よって，③と④をラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}}_{m\dot{x}}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{(-mg)} = 0 \quad \cdots\cdots(*2)$$ に代入すると，

③，④より

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(m\dot{x})}_{m\ddot{x}} + mg = 0 \text{ より，} m\ddot{x} + mg = 0$$

∴ニュートンの運動方程式：$m\ddot{x} = -mg$ ……①　が導けるんだね。

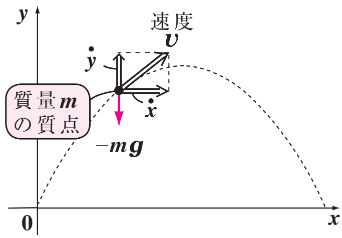
でもここで，$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ のことだから，本当に x と $\dot{x}$ は独立な変数として扱えるのか，疑問が残るって？しかし，この自由落下の問題でも，質点に与

える初速度を変化させれば，同じ位置 x における質点の速度 $\dot{x}$ も自由に変わり得るからね。よって，x と $\dot{x}$ は独立な変数と考えていいんだね。これを敷衍(ふえん)すれば，自由度 f のときの一般化座標とその時間微分 $q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f$ の $2f$ 個の変数もすべて独立な変数として扱えることをご理解頂けると思う。

● 放物運動も調べてみよう！

今度は，1 質点の 2 次元運動 (自由度 $f=2$) の例として，図 2 に示すような xy 座標系において鉛直下向きに重力加速度 g が働く重力場における，空気抵抗を受けない場合の放物運動について調べてみよう。

図 2　空気抵抗のない場合の質点の放物運動



これは，P90 でも示したように，質点に働く力は，y 軸の負の向きの $-mg$ だけなので，ニュートンの運動方程式は，次のようになるのは大丈夫だね。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)} \\ m\ddot{y} = -mg & \cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

では，これをラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \cdots\cdots(*2)\ \ (i = 1,\ \underbrace{2}_{\text{自由度 } f=2})$$

で表してみよう。

今回は，自由度 $f=2$ より，一般化座標とその時間微分の 4 つの独立変数は，$q_1 = x$，$q_2 = y$，$\dot{q}_1 = \dot{x}$，$\dot{q}_2 = \dot{y}$ となるんだけれど，ここでも，x，y，$\dot{x}$，$\dot{y}$ の形のままで，表してみることにする。まず，ラグランジアン L は，

$$L = \underbrace{K}_{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)} - \underbrace{U}_{mgy} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgy$$

となるのはいいね。

ラグランジュの運動方程式は，$f=2$ より，次の 2 つだね。

$$\begin{cases} (\text{i})\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0 & \cdots\cdots(\text{c}) \leftarrow \boxed{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=0\ \text{のこと}} \\ (\text{ii})\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial y}=0 & \cdots\cdots(\text{d}) \leftarrow \boxed{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_2}=0\ \text{のこと}} \end{cases}$$

(i) について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left\{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\cancel{\dot{y}^2})-\cancel{mgy}\right\}$$

定数扱い

$$=\frac{1}{2}m\cdot 2\dot{x}=m\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\cancel{\left\{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy\right\}}=\underline{0}$$

すべて定数扱い

以上を(c)に代入すると，

$\dfrac{d}{dt}(m\dot{x})-\underline{0}=0$ より，$m\ddot{x}=0$ となって，(a)と同じ式が導ける。

(ii) について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\left\{\frac{1}{2}m(\cancel{\dot{x}^2}+\dot{y}^2)-\cancel{mgy}\right\}$$

定数扱い

$$=\frac{1}{2}m\cdot 2\dot{y}=m\dot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial y}\left\{\cancel{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}-mgy\right\}=-mg$$

定数扱い

以上を $\dfrac{d}{dt}\Big(\underbrace{\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}}_{m\dot{y}}\Big)-\underbrace{\dfrac{\partial L}{\partial y}}_{-mg}=0$ ……(d) に代入すると，

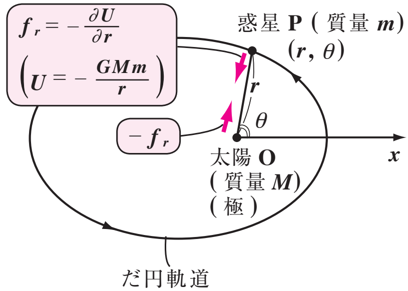
$\dfrac{d}{dt}(m\dot{y})-(-mg)=0$ より，$m\ddot{y}+mg=0$

よって，$m\ddot{y}=-mg$ となって，(b)と同じ方程式が導けるんだね。だんだん，ラグランジュの運動方程式にも慣れてこられたと思う。

● 惑星運動についても調べてみよう！

では最後に，惑星の運動についても調べてみよう。図 **3** に示すように，質量 M の太陽を $\mathbf{O}$，質量 m の惑星を $\mathbf{P}$ とおき，$\mathbf{O}$ を極にして始線 $\mathbf{O}x$ を設定すると，惑星 $\mathbf{P}$ の位置は，極座標 $\mathbf{P}(r,\ \theta)$ で表せるんだね。

図 **3** 万有引力の法則



極座標表示の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，

これを，覚えるのがメンドウなんだね。

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ① \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{bmatrix} \cdots\cdots ②$$

となることは，**P28**，**P127** で既に解説した。

そして，この惑星 $\mathbf{P}$ に働く力は，r 方向の万有引力 $f_r = -G\dfrac{Mm}{r^2}$ だけなので，惑星 $\mathbf{P}$ のニュートンの運動方程式は，次のようになるね。

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\dfrac{Mm}{r^2} & \cdots\cdots ③ \leftarrow \boxed{r \text{ 方向}: ma_r = f_r} \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \leftarrow \boxed{\theta \text{ 方向}: ma_\theta = 0} \end{cases}$$

そして，これは質点 $\mathbf{P}$ の **2** 次元平面内の運動なので，当然自由度 f は，$f = 2$ となるんだね。

では，この場合についても，ラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \cdots\cdots(*2) \ (i = 1,\ \underline{2})$$

自由度 $f = 2$

で調べてみよう。今回の一般化座標とその時間微分の **4** つの独立変数は，$q_1 = r$，$q_2 = \theta$，$\dot{q}_1 = \dot{r}$，$\dot{q}_2 = \dot{\theta}$ なんだけれど，今回も，r，θ，$\dot{r}$，$\dot{\theta}$ の形で表すことにすると，まず，ラグランジアン $L = K - U$ の K と U は，

$$\begin{cases} \text{運動エネルギー } K = \dfrac{1}{2}m(v_r{}^2 + v_\theta{}^2) = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\ \text{ポテンシャルエネルギー } U = -\dfrac{GMm}{r} \end{cases}$$

← 万有引力のポテンシャル (P83)

よって，ラグランジアン L は

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r} \quad \cdots\cdots⑤$$ となるんだね。

そして，ラグランジュの運動方程式は，$f = 2$ より，次の 2 つだ。

$$\begin{cases} (\text{i}) \ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \cdots\cdots⑥ \\ (\text{ii}) \ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$

← $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0$ のこと

← $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0$ のこと

(i) について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}m}_{}(\dot{r}^2 + \cancel{\underbrace{r^2\dot{\theta}^2}_{}}) + \cancel{\underbrace{\frac{GMm}{r}}_{}}\right\} = \frac{1}{2}m \cdot 2\dot{r} = m\dot{r}$$

定数扱い

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}m}_{}(\cancel{\underbrace{\dot{r}^2}_{}} + r^2\underbrace{\dot{\theta}^2}_{}) + \underbrace{GMm}_{} \cdot \frac{1}{r}\right\}$$

定数扱い

$$= \frac{1}{2}m \cdot 2r \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2} = \underline{mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2}}$$

以上を⑥に代入して，

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left\{mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2}\right\} = 0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{r^2} = 0$$ より，

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2}$$ となって，

$ma_r = f_r$ ……③と同じ方程式が導けるんだね。(P254)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r} \quad \cdots\cdots⑤$$
$$(\text{ii}) \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

(ii) について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}m(\underline{\dot{r}^2}+\underline{r^2}\dot{\theta}^2)+\cancel{\frac{GMm}{r}}}_{定数扱い}\right\} = \frac{1}{2}m\cdot r^2\cdot 2\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\underbrace{\cancel{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{GMm}{r}}}_{すべて定数扱い}\right\} = 0$$

以上を⑦に代入して，

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = 0 \qquad \underbrace{m}_{定数}\underbrace{\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}_{2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}} = 0 \quad より，$$

$m(2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}) = 0$　　両辺を $r\ (>0)$ で割って，

$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}) = 0$　となり，

$ma_\theta = 0$　……④　と同じ方程式が導けた！(P254)　面白かった？

● ハミルトンの正準方程式も紹介しよう！

では次に，さらに洗練された“ハミルトンの正準方程式”(*Hamilton's canonical equation*) についても，解説しよう。

ハミルトンの正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ \cdots\cdots(*3), \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \ \cdots\cdots(*3)' \quad (i=1, 2, \cdots, f)$$

ただし，H：ハミルトニアン，q_i：一般化座標，t：時刻，f：自由度

p_i：一般化運動量，　$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ……(∗4)　(L：ラグランジアン)

$H = \sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i - L$ ……(∗5)

このように，ハミルトンの正準方程式は，(∗3) と (∗3)′ の 2 つが対になって表されるんだね。ここで，q_i は一般化座標，また p_i は一般化運動量で，p_i は (∗4) により定義される。でも，ここでは，厳密に考える必要はなく，たとえば，xy 座標系の x 軸，y 軸方向の運動量の成分をそれぞれ p_x，p_y とおくと，従来通り，$p_x = m\dot{x}$，$p_y = m\dot{y}$ であると考えて頂いて構わない。

また，ハミルトニアン $\boldsymbol{H}$ についても，厳密にはラグランジアン $\boldsymbol{L}$ を使って，$(*5)$ で定義される。でもこれも，ある条件は付くんだけれどここでは簡単化して，$\boldsymbol{H=T+U}$ ……$(*5)'$ ($\boldsymbol{T}$：運動エネルギー，$\boldsymbol{U}$：ポテンシャルエネルギー) で定義することにしよう。つまり，$\boldsymbol{H}$ は，全力学的エネルギー $\boldsymbol{E}(=\boldsymbol{T+U})$ と同じものなんだね。従って，

$$\begin{cases} \text{ラグランジアン} \quad \boldsymbol{L=T-U} \\ \text{ハミルトニアン} \quad \boldsymbol{H=T+U} \end{cases}$$
と覚えておけば忘れないはずだ。

ここで，$\boldsymbol{H}$ は，q_i と $\dot{q}_i\,(i=1,2,\cdots,f)$ で表されるけれど，$\dot{q}_i$ を一般化運動量 p_i で表すことにして，$\boldsymbol{H}$ は，q_i と $p_i\,(i=1,2,\cdots,f)$ の関数，すなわち，$H=H(q_1,q_2,\cdots,q_f,p_1,p_2,\cdots,p_f)$ と表すことにする。この 2 種類の独立変数 q_i と p_i を正準(せいじゅん)変数と呼ぶことも覚えておこう。つまり，正準方程式とは，$2f$ 個の正準変数 $q_1,q_2,\cdots,q_f,p_1,p_2,\cdots,p_f$ と，$2f$ 個の対になった方程式

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1} \text{ と } \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2} \text{ と } \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \cdots\cdots,$$
$$\frac{dq_f}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_f} \text{ と } \frac{dp_f}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_f}$$
から構成されているんだね。大丈夫？

ここで，正準方程式 $(*3)$ と $(*3)'$ の覚え方も教えよう。これは“ヘクトパスカル”，つまり，“へ(H)ク(q)ト(t)パ(p)スカル”と覚えるといい。

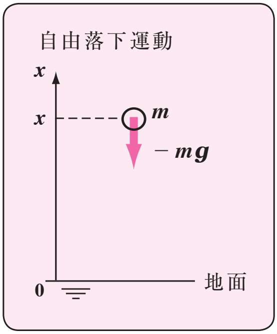
まず，右上に起点となる H(へ)の位置を固定し，“d”や“∂”や“$_i$”などを取り払うと，$(*3)$ では“へ(H)ク(q)ト(t)パ(p)スカル”の順に反時計回り(⊕回り)に文字が並ぶので，そのままとする。これに対して，$(*3)'$ では，時計回り(⊖回り)に同じ文字が並ぶので，右辺に⊖を付けると覚えておけばいいんだね。下の図を見ながら，シッカリ頭に入れて頂きたい。

図 4　ハミルトンの正準方程式の覚え方

(ⅰ) $(*3)$ の方程式　　　(ⅱ) $(*3)'$ の方程式

以上で，ハミルトンの正準方程式についての基本の解説は終了です。この正準方程式も，ラグランジュの運動方程式と同様に，ニュートンの運動方程式と等価なんだね。したがって，これから，自由落下運動と放物運動を例にとって，ハミルトンの正準方程式から，ニュートンの運動方程式が導けることを示しておこう。

● 自由落下運動を調べてみよう！



右図に示すように，P251 で解説した自由落下運動と同じ例題を使うことにする。

この自由度 f は $f=1$ なので，ニュートンの運動方程式は

$m\ddot{x}=-mg$ ………① 　1つの方程式

となるのは大丈夫だね。

では，これをハミルトンの正準方程式で下に表そう。

$$\begin{cases} (\text{i})\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_x} & \cdots\cdots\cdots\cdots② \\ (\text{ii})\ \dfrac{dp_x}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x} & \cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$$

$f=1$ より，正準方程式 $\dfrac{\partial q_1}{\partial t}=\dfrac{\partial H}{\partial p_1}$，$\dfrac{\partial p_1}{\partial t}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}$ の $q_1=x$，$p_1=p_x$ とおいた。

まず，運動量 $p_x=m\dot{x}$ より，$\dot{x}=\dfrac{p_x}{m}$ ………④

また，ハミルトニアン $H=T+U=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+mgx$ ………⑤ より，

⑤に④を代入して，

$H=\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{p_x}{m}\right)^2+mgx$ 　より

$H=\dfrac{p_x}{2m}+mgx$ ………⑤′ となる。　H は，q_1 と p_1，すなわち x と p_x の式で表す。

これで，準備が整ったので，後は⑤′を②と③に代入するだけだ。

(ⅰ) ⑤´ を②に代入して，

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p_x}\Big(\underbrace{\frac{1}{2m}}\,p_x{}^2 + \cancel{mgx}\Big) = \frac{1}{2m}\cdot 2p_x = \frac{p_x}{m}$$ となる。

定数扱い

これは，④と同じ運動量の式だ！

(ⅱ) ⑤´ を③に代入して，

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{1}{2m}p_x{}^2} + \underline{mgx}\Big) = -mg$$ となる。

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

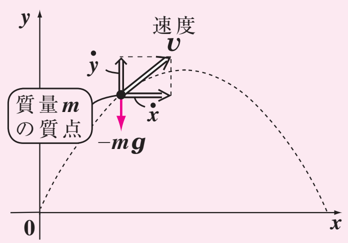
定数扱い

これから，$m\ddot{x} = -mg$ となって，①のニュートンの運動方程式が導けた。この例題を解いて，(ⅰ) の $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$ ……②から，運動量の式が出てくるだけだから②は不要で，(ⅱ) の $\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ ……③だけでいいんじゃないかと，思っておられる方がほとんどだと思う。ここでは，詳しくは解説できないけれど，現時点では，ハミルトンの正準方程式は，正準変数 q_i，p_i と共に，②と③のペアで 1 つの意味をなしていると考えて頂きたい。

● 放物運動も調べてみよう！

右図に示すように，P252 で解説した放物運動と同じ例題をここでも使うことにしよう。

空気抵抗がない場合の放物運動



この自由度 f は $f=2$ なので，ニュートンの運動方程式は，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a}) \\ m\ddot{y} = -mg & \cdots\cdots(\mathrm{b}) \end{cases}$$

2 つの方程式

となるのはいいね。では，これをハミルトンの正準方程式で表すと，次のようになる。

$$\begin{cases} (\mathrm{i})\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} & \cdots\cdots\cdots(\mathrm{c}) \\ (\mathrm{ii})\ \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} & \cdots\cdots(\mathrm{d}) \end{cases} \qquad \begin{cases} (\mathrm{iii})\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} & \cdots\cdots\cdots(\mathrm{e}) \\ (\mathrm{iv})\ \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} & \cdots\cdots(\mathrm{f}) \end{cases}$$

$q_1 = x$，$q_2 = y$
$p_1 = p_x$，$p_2 = p_y$ として 2 組の正準方程式が導ける。

まず，運動量 $p_x = m\dot{x}$，$p_y = m\dot{y}$ より

$\dot{x} = \dfrac{p_x}{m}$ ……(g)　　$\dot{y} = \dfrac{p_y}{m}$ ……(h)

また，ハミルトニアン H は，

$$H = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \quad \cdots\cdots(\text{i})$$

(i)に，(g)と(h)を代入して，H を x，y，p_x，p_y の周数で表すと，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{a}) \\ m\ddot{y} = -mg & \cdots\cdots(\text{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\text{i})\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} & \cdots\cdots\cdots(\text{c}) \\ (\text{ii})\ \dfrac{dp_x}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & \cdots\cdots(\text{d}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\text{iii})\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} & \cdots\cdots\cdots(\text{e}) \\ (\text{iv})\ \dfrac{dp_y}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} & \cdots\cdots(\text{f}) \end{cases}$$

$$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2}\right) + mgy \qquad \therefore H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy \quad \cdots\cdots(\text{i})'$$

これで，準備が整ったので，(i)′を(c)，(d)，(e)，(f)に代入しよう。

(i) (i)′を(c)に代入して

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p_x}\left\{\frac{1}{\underline{2m}}(p_x^2 + \underline{p_y}^2) + \cancel{mgy}\right\} = \frac{2p_x}{2m} = \frac{p_x}{m}$$

定数扱い

運動量の式(g)が導かれただけ！

(ii) (i)′を(d)に代入して

$$\underline{\dot{p}_x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\cancel{\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy}\right\} = 0 \quad \text{より}$$

$\dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$

x から見たら，すべて定数扱い

ニュートンの運動方程式 $m\ddot{x} = 0$ ……(a)が，まず 1 つ導けた。

(iii) (i)′を(e)に代入して

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial p_y}\left\{\frac{1}{\underline{2m}}(\cancel{p_x^2} + p_y^2) + \cancel{mgy}\right\} = \frac{2p_y}{2m} = \frac{p_y}{m}$$

定数扱い

運動量の式(h)が導かれただけ！

(iv) (i)′を(f)に代入して

$$\underline{\dot{p}_y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\cancel{\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)} + \underline{mgy}\right\} = -mg \quad \text{より}$$

$\dfrac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y}$

定数扱い

もう 1 つのニュートンの方程式 $m\ddot{y} = -mg$ ……(b)も導けた。

以上で，ハミルトンの正準方程式から，ニュートンの運動方程式が導けること，つまり，ハミルトンの正準方程式とニュートンの運動方程式が，等価であることもご理解頂けたと思う。

以上の解説では，解析力学で利用される“ラグランジュの運動方程式”と“ハミルトンの正準方程式”の本当の初歩的な利用法を示したに過ぎないので，何故，ニュートンの運動方程式の代わりに，ラグランジュの運動方程式や，ハミルトンの正準方程式を利用する必要があるのか？疑問に思われている方もたく山いらっしゃると思う。でも，これで，解析力学にも少しは興味をもって頂けたのではないだろうか？

実は，この解析力学で用いられるすぐれた数学的な手法は，オイラー角や，汎関数と変分原理，そして最小作用の原理や，リウビルの定理，さらにポアソン括弧などなど……，様々な分野にまで波及していくんだね。そして，これらの数学的手法は，統計力学や流体力学，そして量子力学においても重要な役割を演じることになる。つまり，解析力学は，現代の様々な分野の力学をマスターしていく上で，基礎となる重要な学問分野と言えるんだね。

したがって，さらに，この解析力学を極めたい方には，この後，**「解析力学キャンパス・ゼミ」(マセマ)**で学習されることをお勧めする。これによって，さらに奥深くて面白い本格的な解析力学の世界を堪能して頂けると思います。