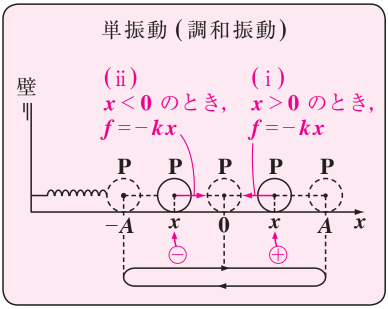
● 単振動(調和振動)を調べよう！

単振動については，**P104** で解説したね。右図に示すように，バネに取り付けた質量 m の重り(質点)**P** が何ら抵抗を受けることなく，左右に単振動する場合を考える。



この運動の自由度 $f=1$ で，ニュートンの運動方程式は，

$\ddot{x}=-\omega^2 x$ ……① $\left(\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$

と表され，この解は，$x=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$ となることは既に解説した。

それでは，これをハミルトンの正準方程式で表すと次のようになるのもいいね。

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_x} & \cdots\cdots\cdots ② \\ \dfrac{dp_x}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x} & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

自由度 $f=1$ より，H は，
$q_1=x$，$p_1=p_x=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$
とおいて，H は x と p_x の関数 $H(x,\ p_x)$ で表される。

では，この正準方程式②，③から，ニュートンの運動方程式を導いてみよう。

ハミルトニアン H は，まず，(ア)ラグランジアン L を求め，次に(イ)$p_x=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ により p_x を求め，そして，(ウ)$H=p_x\cdot\dot{x}-L$ により，求めるんだね。

(ア)まず，ラグランジアン L は，

$L=T-U=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2-\dfrac{1}{2}kx^2$ ……④ となる。次に，

(イ)運動量 p_x は，

$p_x=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2-\underbrace{\cancel{\dfrac{1}{2}kx^2}}_{\text{定数扱い}}\right)=\dfrac{1}{2}m\cdot 2\cdot\dot{x}=m\dot{x}$ ……⑤ となる。

よって，⑤より，$\dot{x}=\dfrac{p_x}{m}$ ……⑥ となるんだね。

⑥を④に代入すると，L は，

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{p_x^{\ 2}}{2m} - \frac{1}{2}kx^2 \quad \cdots\cdots④' \text{ となる。よって，}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad \cdots\cdots\cdots② \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \cdots\cdots③ \end{aligned}}$$

(ウ) ハミルトニアン H は，

$$H = \underbrace{p_x \cdot \dot{x}}_{\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i \quad (f=1)} - L = p_x \cdot \frac{p_x}{m} - \left(\frac{p_x^{\ 2}}{2m} - \frac{1}{2}kx^2\right) \text{ より，}$$

$$H = \frac{p_x^{\ 2}}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad \cdots\cdots⑦ \text{ となるんだね。}$$

$H = T + U$ の形になっている。

これで H が求まったので，これを②，③に代入すればオシマイだ。

(i) ⑦を②に代入して，

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p_x}\left(\frac{p_x^{\ 2}}{2m} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}kx^2}}_{\text{定数扱い}}\right) = \frac{2p_x}{2m} = \frac{p_x}{m} \text{ となって，}$$

⑥と同じ運動量 p_x の式が導けた。

(ii) ⑦を③に代入して，

$$\underbrace{\dot{p}_x}_{\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\cancel{\frac{p_x^{\ 2}}{2m}}}_{\text{定数扱い}} + \frac{1}{2}kx^2\right) = -\frac{1}{2}k \cdot 2x = -kx \text{ より，}$$

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

ここで，$\frac{k}{m} = \omega^2$ より，ニュートンの運動方程式

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \cdots\cdots① \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \text{ を導くことができるんだね。}$$

それでは，単振動と似ているけれど，単振り子の運動についても，ハミルトンの正準方程式から，ニュートンの運動方程式が導けることを示そう。