§ 3. 偏微分方程式入門

常微分方程式とは 1 変数関数の微分方程式のことであり，これまで様々なタイプの常微分方程式の解法パターンについて解説してきたんだね。これに対して，偏微分(へんびぶん)方程式とは，2 つ以上の独立変数をもつ多変数関数の微分方程式のことである。この解法の仕方についても，1 次元の熱伝導方程式を例にとって簡単に解説しておこう。

● 1 次元熱伝導方程式は，2 つの常微分方程式で表される！

1 次元熱伝導方程式は，温度を $u(x, t)$ とおくと，次のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots ①$$

(u : 温度， t : 時刻， x : 位置， a : 定数)

温度 u は，2 つの独立変数 x と t の関数であり，x により表される 1 次元の棒状の物体の温度分布 u の時刻 t による変化を①の方程式から求めることができるんだね。常微分では，u の t での 1 階微分は $\frac{du}{dt}$ で表したけれど，u は多変数関数なので，その偏微分として $\frac{\partial u}{\partial t}$ と表す。これは，u_t と略記してもよい。①の右辺の $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ も，多変数関数 u の x による 2 階の偏微分を表しており，これも u_{xx} と略記できる。

ここで，①の定数 $a = 1$ として，

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots ①'$ の解法のやり方について，教えておこう。

2 変数関数 $u(x, t)$ を x だけの関数 $X(x)$ と t だけの関数 $T(t)$ の積として，

$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad \cdots\cdots ②$ と表されるものとして，①´を解くことにする。

このように，変数 X と T の関数に分離して解く方法を "**変数分離法**(へんすうぶんりほう)" という。②を①´に代入すると，

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(XT)}_{X \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = X \cdot T_t} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT)}_{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot T = X_{xx} \cdot T} \text{ より，} \quad X \cdot T_t = X_{xx} \cdot T \quad \cdots\cdots ③$$

③の両辺を $X \cdot T$ で割ると,

$$\frac{T_t}{T} = \frac{X_{xx}}{X} \quad \cdots\cdots ④$$ となる。

t のみの式　x のみの式

T の時刻 t による微分 $\frac{dT}{dt}$ は $\dot{T}$ と表し,
X の位置 x による 2 階微分 $\frac{d^2X}{dx^2}$ は X'' と
表せるので,④は $\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X}$ と表してもいい。

T も X も 1 変数関数なので,$\frac{dT}{dt}$ や $\frac{d^2X}{dx^2}$ と表せる。

ここで,④の左辺は t のみの式であり,また右辺は x のみの式なので,④の等式が恒等的に成り立つためには,これはある定数 α に等しくなければならない。しかも,ここでは結果だけしか示さないけれど,これは負 (⊖) でなければならないので,$\alpha = -\omega^2$ $(\omega > 0)$ とおくと④は,

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\omega^2 \quad \cdots\cdots ④' \quad (\omega : \text{正の定数})$$ となる。

この④´から,(i) $X'' = -\omega^2 X$ ……⑤ と (ii) $\dot{T} = -\omega^2 T$ ……⑥ の 2 つの常微分方程式が得られることになる。

(i) $X'' = -\omega^2 X$ ……⑤ は,$\frac{d^2X}{dx^2} = -\omega^2 X$ のことなので,

これは単振動の微分方程式だね。よって,この一般解は,

$X(x) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t$ ……⑦ $(A_1, A_2 : \text{定数})$ となる。

(ii) $\dot{T} = -\omega^2 T$ ……⑥ は,$\frac{dT}{dt} = -\omega^2 T$ のことなので,この一般解は,

$T(t) = B_1 e^{-\omega^2 t}$ ……⑧ $(B_1 : \text{定数})$ となるんだね。

この後は,初期条件や境界条件を用いて,定数 A_1,A_2,B_1 の値を決定して,さらに,フーリエ級数解析なども利用して解いていくことになる。しかし,偏微分方程式も,変数分離法により,基本的には常微分方程式の解法に帰着することが分かって,興味をもって頂けたと思う。

この後さらに偏微分方程式を本格的に学習したい方は,「**フーリエ解析キャンパス・ゼミ**」や「**偏微分方程式キャンパス・ゼミ**」(**マセマ**) で勉強されることを勧めます。