演習問題 33 ● 曲面の面積(Ⅲ) ●

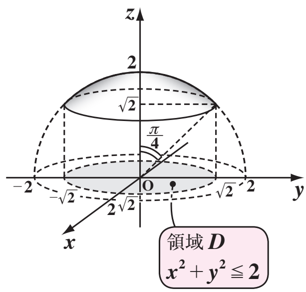
曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ $(z \geqq \sqrt{2})$ の面積を求めよ。

ヒント！ 曲面の面積 S は，公式：$S=\iint_D \sqrt{f_x{}^2+f_y{}^2+1}\,dxdy$ $(x^2+y^2 \leqq 2)$ を用いて解いていこう。積分の際に，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ として，極座標 $(r,\ \theta)$ に変換して解くことがポイントになる。頑張ろう！

解答＆解説

曲面 $z=f(x,\ y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ …① $(z \geqq \sqrt{2})$ は，

①より，$z^2=4-x^2-y^2$　$x^2+y^2+z^2=4$
よって，これは原点 O を中心とする半径 2 の上半球面を表す。さらに，$z \geqq \sqrt{2}$ の条件から，この①の上半球面の内，領域 D：$x^2+y^2 \leqq 2$ の範囲の図形を表す。



右図に示すように，原点 O を中心とする半径 2 の上半球面の内，領域 D：$x^2+y^2 \leqq 2$ に対応する曲面を表す。この曲面の面積 S を求める。

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \cdots\cdots②$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \cdots\cdots③ \text{ より，}$$

②，③を曲面 S の面積公式に代入すると，

$$S=\iint_D \sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}\,dxdy=\iint_D \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+1=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+4-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}}{4-x^2-y^2}=\frac{4}{4-x^2-y^2}$$

$$\therefore\ S=2\iint_D (4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dxdy \quad \cdots\cdots④ \text{ となる。}$$

$$S = 2\iint_D (4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dxdy \quad \cdots ④$$

について，ここで，座標 $(x,\ y)$ を

$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ により，

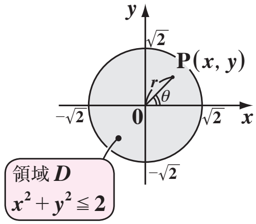
極座標 $(r,\ \theta)$ に変換すると，

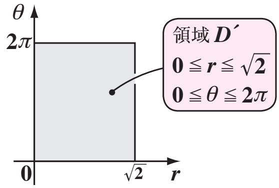
・$(x,\ y)$ の領域 D ：$x^2+y^2 \leqq 2$ は，

・$(r,\ \theta)$ の領域 D' ：$\begin{cases} 0 \leqq r \leqq \sqrt{2} \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \end{cases}$

に変換される。また，$x^2+y^2=r^2$，

$$dxdy = \underbrace{|J|}_{r}\,drd\theta = rdrd\theta$$





となる。以上より，求める曲面 $z = f(x,\ y)$ $(z \geqq \sqrt{2})$ の面積 S は，

④を変形して，

$$S = 2\iint_D \{4-\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\}^{-\frac{1}{2}}\,\underbrace{dxdy}_{rdrd\theta} = 2\iint_{D'} (4-r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot rdrd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}\,dr}_{\left[-(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}}$$

合成関数の微分 $\{(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\}' = \dfrac{1}{2}(4-r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2r) = -r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}$ を利用した。

$$= 2\underbrace{\left[\theta\right]_0^{2\pi}}_{2\pi} \cdot \underbrace{\left[-(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}}_{-(4-2)^{\frac{1}{2}}+(4-0)^{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{2}} = 2 \cdot 2\pi \cdot (2-\sqrt{2})$$

$= 4\pi(2-\sqrt{2})$ となる。……………………………………………………(答)