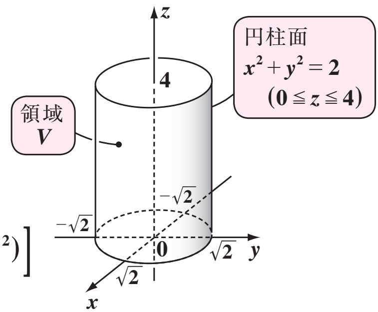
演習問題 13　● ガウスの発散定理 (Ⅲ) ●

空間ベクトル場 $\boldsymbol{f} = \left[\dfrac{zx^3}{3},\ \dfrac{y^3z}{3},\ z(x^2+y^2)\right]$ において，
円柱面：$x^2+y^2=2\ (0 \leqq z \leqq 4)$ と 2 つの平面 $z=0$ と $z=4$ とで囲まれる領域を V とおく。また，この V を囲む閉曲面を S とおく。このとき，面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ。(ただし，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の内部から外部に向かう向きをとるものとする。)

ヒント！ 今回も，ガウスの発散定理：$\displaystyle\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\,dV$ を用いて，面積分を体積分に持ち込んで解く問題だね。ただし，その際に円柱座標，すなわち，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$　$(0 \leqq r \leqq \sqrt{2},\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を利用して計算すると，計算が楽になるんだね。このとき，ヤコビアン J は $J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}$ として求めよう。

解答＆解説

右図に示すように，
円柱面 $x^2+y^2=2$　$(0 \leqq z \leqq 4)$ と，
z 軸上の点を中心とする，半径 $\sqrt{2}$ の円柱面
2 平面：$z=0$ (xy 平面) と $z=4$ とで囲まれる領域を V とおく。

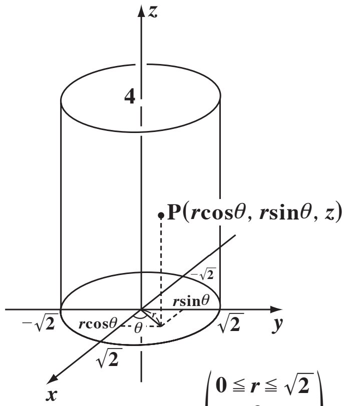


ここで，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = \left[\dfrac{zx^3}{3},\ \dfrac{y^3z}{3},\ z(x^2+y^2)\right]$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}$ を求めると，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{zx^3}{3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3z}{3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left\{z(x^2+y^2)\right\}$$
$$= z\cdot x^2 + y^2\cdot z + x^2 + y^2 = z(x^2+y^2) + (x^2+y^2)$$
$$= (x^2+y^2)\cdot(z+1) \quad \cdots\cdots ① \quad \text{となる。}$$

よって，①より求める面積分は，ガウスの発散定理を用いて，次のようになる。

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\,dV = \iiint_V (x^2+y^2)(z+1)\,dx\,dy\,dz \quad \cdots\cdots ②$$



$$\begin{pmatrix} 0 \leqq r \leqq \sqrt{2} \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \\ 0 \leqq z \leqq 4 \end{pmatrix}$$

　ここで，xy 座標系を円筒座標系に変換すると，

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$

$(0 \leqq r \leqq \sqrt{2}$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$，$0 \leqq z \leqq 4)$

となる。ここで，

$x_r = \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$，$x_\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$

$y_r = \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$，$y_\theta = \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$ より，

ヤコビアン J を求めると，

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}$ となる。

$\therefore J = r$ である。よって，

$dx\,dy\,dz = |J|\,dr\,d\theta\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$ となる。

以上より，②の積分計算を行うと，

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\cdot(z+1)\underbrace{dx\,dy}_{r\cdot dr d\theta}dz$$

$$= \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2(z+1)\cdot r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr}_{\frac{1}{4}[r^4]_0^{\sqrt{2}} = \frac{4}{4} = 1}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi}\cdot\underbrace{\int_0^4 (z+1)dz}_{\left[\frac{1}{2}z^2+z\right]_0^4 = 8+4=12}$$

$= 1\cdot 2\pi\cdot 12 = 24\pi$ となる。……………………………………(答)