演習問題 116　● 2 次形式の標準形への変形 (Ⅲ) ●

2 次曲線 $5x^2-8\sqrt{2}\,xy+y^2=9$ ……①　の左辺を標準形に変形して，これが双曲線であることを確認せよ。

ヒント！ ①の左辺を $[x\ y]A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ の形にして，対称行列 A を直交行列 U により，$U^{-1}AU$ として対角化し，また $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ として新たな変数 x'，y' を用いて標準形に直すことができる。

解答＆解説

$5x^2-8\sqrt{2}\,xy+y^2=9$ ……① の左辺を，新たな変数 x'，y' を用いて，標準形にする。まず，

①の左辺 $=[x\quad y]\begin{bmatrix}5 & -4\sqrt{2}\\-4\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ……② とする。

対称行列 A の
$\begin{cases}\lambda：固有値\\ \boldsymbol{x}：固有ベクトル\end{cases}$

ここで，$A=\begin{bmatrix}5 & -4\sqrt{2}\\-4\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$ とおき，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，すなわち，

$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ……③ (ただし，$T=A-\lambda E$) をみたす λ と $\boldsymbol{x}$ を求める。

固有方程式 $|T|=\begin{vmatrix}5-\lambda & -4\sqrt{2}\\-4\sqrt{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}=\underbrace{(5-\lambda)(1-\lambda)}_{(\lambda-5)(\lambda-1)=\lambda^2-6\lambda+5}-\underbrace{(-4\sqrt{2})^2}_{32}=0$ より，

$\lambda^2-6\lambda-27=0$，$(\lambda-9)(\lambda+3)=0$　$\therefore\ \lambda=\underbrace{9}_{\lambda_1},\ \underbrace{-3}_{\lambda_2}$

・$-4\alpha_1-4\sqrt{2}\alpha_2=0$ の両辺を -4 で割る。
・$-4\sqrt{2}\alpha_1-8\alpha_2=0$ の両辺を $-4\sqrt{2}$ で割る。

(i) $\lambda_1=9$ のとき，③を $T_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$　そして $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix}-4 & -4\sqrt{2}\\-4\sqrt{2} & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\qquad\therefore\ \alpha_1+\sqrt{2}\alpha_2=0$$

ここで，$\alpha_2=-k_1$ とおくと，$\alpha_1=\sqrt{2}k_1$　$\therefore\ \boldsymbol{x}_1=k_1\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}$

$\|\boldsymbol{x}_1\|=1$ とするために，$k_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおく。$\therefore\ \boldsymbol{x}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}$

(ii) $\lambda_2 = -3$ のとき，③を $T_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ そして $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} 8 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \sqrt{2}\,\beta_1 - \beta_2 = 0$$

・$8\beta_1 - 4\sqrt{2}\beta_2 = 0$ の両辺を $4\sqrt{2}$ で割る。
・$-4\sqrt{2}\beta_1 + 4\beta_2 = 0$ の両辺を -4 で割る。

ここで，$\beta_1 = k_2$ とおくと，$\beta_2 = \sqrt{2}\,k_2 \quad \therefore \boldsymbol{x}_2 = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\|\boldsymbol{x}_2\| = 1$ とするために，$k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \boldsymbol{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

以上 (i)，(ii) より，A を対角化する直交行列 U は，

$U = [\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2] = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ となり，これを用いて A を対角化すると，

$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ……④ となる。

ここで，新たな変数 x'，y' を，

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = U\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ……⑤ で定義する。⑤の両辺の転置行列をとって，

$[x \ \ y] = [x' \ y']\,{}^tU = [x' \ y']U^{-1}$ ……⑤′

${}^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = {}^t\left(U\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right)$

$[x \ \ y] = [x' \ \ y']\underbrace{{}^tU}_{U^{-1}}$

⑤，⑤′を②に代入して，

①の左辺 $= [x' \ y']\underbrace{U^{-1}AU}_{\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\text{(④より)}}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x' \ y']\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$$= [9x' \ \ -3y']\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 9x'^2 - 3y'^2$$

これを①に代入して，$9x'^2 - 3y'^2 = 9$ より，双曲線 $x'^2 - \dfrac{y'^2}{3} = 1$ が導ける。

……(終)

直交行列 U による直交変換では，図形 (曲線) の形はそのまま保存されるので，元の①式も双曲線であることが分かるんだね。