§2. ゼータ関数と無限級数

フーリエ級数解析から，様々な無限級数の公式を導いたけれど **(P101)**，その中で，次の **2** つに着目してみよう。

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\ \cdots①\qquad \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}\ \cdots②$$

この①，②は，実は次に示す“ゼータ関数”$\zeta(s)$ の **1** 種と考えることができる。

$$\text{ゼータ関数}\ \zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots \quad\cdots\cdots(*1)$$

一般に，このゼータ関数 $\zeta(s)$ の独立変数 s は，複素数をとるんだけれど，①と②はその中で，$s=2$ または，**4** のときの特殊な場合と考えることができるんだね。そして，このゼータ関数 $\zeta(s)$ は，次式で示すように，素数 p (*prime number*) の式と密接に関係している。

> 素数 p とは，**1** と自分自身以外に約数をもたない自然数のことで，**1** は除く。
> よって具体的には，$p=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ \cdots$のことである。
> そして，素数でない自然数は合成数 (*composite number*) という。一般に，
> すべての自然数は素数 p により一意 (**1**通り) に素因数分解できる。

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=\prod_{p:prime}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\quad\cdots\cdots(*2)$$

これだけでは，まだ何のことか全然分からないだろうね。これから解説しよう。

まず，$(*2)$ の右辺の $\displaystyle\prod_{p:prime}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ は，考案者のオイラー (*Leonhard Euler*) に因(ちな)んで，“オイラー積”と呼ぶことにしよう。このオイラー積は，すべての素数 p に渡って，$\dfrac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ の積をとったもので，次のような無限積で表されるんだね。

$$\prod_{p:prime}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\times\cdots\cdots\quad\cdots\cdots③$$

もちろん，オイラー積は，次のように表すこともできる。

$$\prod_{p:prime}\frac{p^s}{\underbrace{p^s-1}_{\text{分子・分母に }p^s\text{ をかけた}}}=\frac{2^s}{2^s-1}\times\frac{3^s}{3^s-1}\times\frac{5^s}{5^s-1}\times\frac{7^s}{7^s-1}\times\cdots\cdots \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③'$$

ここで，話を①の無限級数に戻して，複素数 s が実数 $s=2$ のときについて考えてみよう。すると，$(*2)$ と③から，このときのゼータ関数 $\zeta(2)$ は，

$\zeta(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\prod_{p:prime}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}$ ……$(*2)'$ となる。さらにこれを具体的に示すと，次のようになるんだね。

$$\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}\times\cdots\cdots(*2)'$$

しかし，この等式 $(*2)'$ が本当に成り立つのか？疑問に思っているだろうね。これから解説しよう。$(*2)'$ の右辺の各項は，$\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}$ （p：素数）の形をしているけれど，$\frac{1}{p^2}=r$（公比）とおくと，これは，$\frac{1}{1-r}$ となり，また，$p\geqq 2$ より，$-1<r=\frac{1}{p^2}<1$ をみたす。つまりこれは，初項 1，公比 r の無限等比級数 $1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}$ （収束条件：$-1<r<1$）の形をしていることが分かるでしょう。よって，$(*2)'$ の右辺の各項を具体的な無限等比級数で表すと，

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1}{2^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2^2}\right)^3+\cdots,\quad \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{3^2}+\left(\frac{1}{3^2}\right)^2+\left(\frac{1}{3^2}\right)^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}=1+\frac{1}{5^2}+\left(\frac{1}{5^2}\right)^2+\left(\frac{1}{5^2}\right)^3+\cdots,\quad \frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}=1+\frac{1}{7^2}+\left(\frac{1}{7^2}\right)^2+\left(\frac{1}{7^2}\right)^3+\cdots$$

……となるんだね。よって，$(*2)'$ の等式を具体的に示すと，

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\left\{1+\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1}{2^2}\right)^2+\cdots\right\}\times\left\{1+\frac{1}{3^2}+\left(\frac{1}{3^2}\right)^2+\cdots\right\}$$
$$\times\left\{1+\frac{1}{5^2}+\left(\frac{1}{5^2}\right)^2+\cdots\right\}\times\cdots \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*2)''$$

となる。しかし，これでもまだ，この等式が成り立つのか？確信できない方がほとんどだと思う。しかし，この $(*2)''$ の右辺を実際に分配の法則を使って，次のように展開してみると，これが左辺の無限級数

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ を表していることが見えてくるはずだ。

$$((*2)''\text{の右辺})=\left\{1+\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1}{2^2}\right)^2+\cdots\right\}\times\left\{1+\frac{1}{3^2}+\left(\frac{1}{3^2}\right)^2+\cdots\right\}\times\left\{1+\frac{1}{5^2}+\left(\frac{1}{5^2}\right)^2+\cdots\right\}\times\cdots$$

① $1\times1\times1\times\cdots=1$

② $\frac{1}{2^2}\times1\times1\times\cdots=\frac{1}{2^2}$

③ $1\times\frac{1}{3^2}\times1\times\cdots=\frac{1}{3^2}$

④ $\left(\frac{1}{2^2}\right)^2\times1\times1\times\cdots=\frac{1}{4^2}$

①では，$1\times1\times1\times1\times\cdots=1$，　②では，$\frac{1}{2^2}\times1\times1\times1\times\cdots=\frac{1}{2^2}$

③では，$1\times\frac{1}{3^2}\times1\times1\times\cdots=\frac{1}{3^2}$，④では，$\left(\frac{1}{2^2}\right)^2\times1\times1\times1\times\cdots=\frac{1}{4^2}$

さらに，⑤ $\frac{1}{5^2}$，⑥ $\frac{1}{6^2}$，⑦ $\frac{1}{7^2}$，⑧ $\frac{1}{8^2}$ まで示しておくと，

⑤では，$1\times1\times\frac{1}{5^2}\times1\times\cdots=\frac{1}{5^2}$，⑥では，$\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{3^2}\times1\times1\times\cdots=\frac{1}{6^2}$

⑦では，$1\times1\times1\times\frac{1}{7^2}\times\cdots=\frac{1}{7^2}$，⑧では，$\left(\frac{1}{2^2}\right)^3\times1\times1\times1\times\cdots=\frac{1}{8^2}\cdots$

以降，重複することなく，欠落することなく，$(*2)''$ の右辺を展開することにより，これが $(*2)''$ の左辺の無限級数 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ を表していけることが，ご理解頂けると思う。

よって，

$$\zeta(2)=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{\frac{\pi^2}{6}\ (①より)}=\underbrace{\prod_{p:prime}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}}_{\prod_{p:prime}\frac{p^2}{p^2-1}}\quad\cdots\cdots(*2)'$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\quad\cdots①$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}\quad\cdots②$$

が成り立つことが分かった。ここで，①の結果より，$(*2)'$ は，

$$\underbrace{\frac{2^2}{2^2-1}\times\frac{3^2}{3^2-1}\times\frac{5^2}{5^2-1}\times\frac{7^2}{7^2-1}\times\cdots}_{\text{オイラー積（素数から構成される無限積）}}=\underbrace{\frac{\pi^2}{6}}_{\text{無理数}}$$

となって興味深い結果が導けるんだね。すなわち，素数から構成される無限積（オイラー積）が，簡単な無理数 $\frac{\pi^2}{6}$ と一致するということなんだね。面白かったでしょう？

同様に，$s=4$ のときも考察すると，

$$\zeta(4)=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}}_{\frac{\pi^4}{90}\ (②より)}=\underbrace{\prod_{p:prime}\frac{1}{1-\frac{1}{p^4}}}_{\prod_{p:prime}\frac{p^4}{p^4-1}}\quad\cdots\cdots(*2)'''$$

となるので，

$$\frac{2^4}{2^4-1}\times\frac{3^4}{3^4-1}\times\frac{5^4}{5^4-1}\times\frac{7^4}{7^4-1}\times\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

も導けるんだね。

一般に，複素数 s の関数であるゼータ関数 $\zeta(s)$ は，$\underbrace{Re(s)}_{s\text{の実部}}>1$ でしか定義できない。これを $Re(s)<1$ でも定義するために，この $\zeta(s)$ を解析接続したものを利用すると，有名な"リーマン予想"とも関わってくるんだね。

このように，フーリエ解析から導かれた無限級数の公式から，様々な数学上の重要テーマが導かれていくことが分かって頂けたと思う。