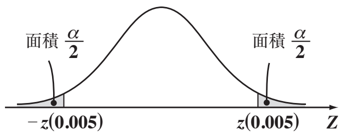
それでは，ここで，例題を解いておこう。

(2)(ⅰ) 非常に大きな数 N の母集団があり，この母集団の X 政党への支持率(母比率)が p_X であるものとする。この母集団から標本数 $n_X = 600$ の標本を無作為に抽出して，X 政党への支持率を調べた結果，$\overline{p}_X = 0.4(=40\%)$ であった。このとき，母集団の X 政党への支持率 p_X の 99% 信頼区間を小数第 3 位まで求めよ。

(ⅱ) 同じ母集団での Y 政党への支持率は p_Y であるものとする。この母集団から標本数 $n_Y = 324$ の標本を無作為に抽出して，Y 政党への支持率を調べた結果，$\overline{p}_Y = 0.1(10\%)$ であった。このとき，母集団の Y 政党への支持率 p_Y の 95% 信頼区間を小数第 3 位まで求めよ。

(ⅲ) X 政党の支持率を調べるための標本数のみを n'_X と変えて，p_X の 99% 信頼区間の幅が(ⅱ)の Y 政党への支持率 p_Y の 95% 信頼区間の幅と等しくなるようにするものとする。このときの標本数 n'_X を，小数第 1 位を四捨五入することにより求めよ。

(2)(ⅰ) 母比率 p_X の 99% 信頼区間より，$1-\alpha = 0.99$，すなわち有意水準 $\alpha = 0.01$ となる。また，標本の大きさ $n_X = 600$，標本比率 $\overline{p}_X = 0.4$ より，P225 の標準正規分布表から $z\left(\frac{\alpha}{2}\right) = z(0.005)$ の値を求めると，$z(0.005) = 2.58$ となる。



標準正規分布表

z	……	0.08
⋮		⋮
2.5	……	0.00494

以上より，母比率 p_X の 99% 信頼区間は，

$$0.4 - 2.58\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{600}} \leqq p_X \leqq 0.4 + 2.58\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{600}} \text{ より，}$$

$$\left[\overline{p}_X - z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\overline{p}_X\cdot(1-\overline{p}_X)}{n_X}} \leqq p_X \leqq \overline{p}_X + z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\overline{p}_X\cdot(1-\overline{p}_X)}{n_X}}\right]$$

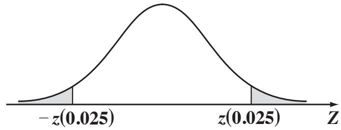
$$\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}} = \sqrt{\frac{0.04}{100}} = \sqrt{\frac{4}{10000}} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$\underbrace{0.4 - \frac{2.58}{50}}_{0.3484 \fallingdotseq 0.348} \leqq p_X \leqq \underbrace{0.4 + \frac{2.58}{50}}_{0.4516 \fallingdotseq 0.452}$$

$\therefore\ 0.348 \leqq p_X \leqq 0.452$ となる。……………………………………………(答)

(ii) 母比率 p_Y の 95% 信頼区間より，

$1-\alpha=0.95$，すなわち有意水準 $\alpha=0.05$ となる。また，標本の大きさ $n_Y=324$，標本比率 $\overline{p}_Y=0.1$ より，P225 の標準正規分布表から $z\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=z(0.025)$ の値を求めると，$z(0.025)=1.96$ となる。



標準正規分布表

z	……	0.06
⋮		⋮
1.9	……	0.025

以上より，母比率 p_Y の 95% 信頼区間は，

$$0.1-1.96\cdot\sqrt{\frac{0.1\cdot(1-0.1)}{324}} \leqq p_Y \leqq 0.1+1.96\cdot\sqrt{\frac{0.1\cdot(1-0.1)}{324}} \text{ より，}$$

$$\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{324}}=\sqrt{\frac{9}{32400}}=\sqrt{\frac{1}{3600}}=\frac{1}{60}$$

$$\left[\ \overline{p}_Y-z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\overline{p}_Y\cdot(1-\overline{p}_Y)}{n_Y}} \leqq p_Y \leqq \overline{p}_Y+z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\overline{p}_Y\cdot(1-\overline{p}_Y)}{n_Y}}\ \right]$$

$$\underbrace{0.1-\frac{1.96}{60}}_{0.067333\cdots\fallingdotseq0.067} \leqq p_Y \leqq \underbrace{0.1+\frac{1.96}{60}}_{0.132666\cdots\fallingdotseq0.133}$$

$\therefore\ 0.067 \leqq p_Y \leqq 0.133$ となる。……①……………………………………(答)

以上より，母比率の 95% 信頼区間と 99% 信頼区間の公式は次のようになる。

母比率の信頼区間

(I) 母比率 p の 95% 信頼区間

$$\overline{p}-1.96\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n}} \leqq p \leqq \overline{p}+1.96\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n}}$$

(II) 母比率 p の 99% 信頼区間

$$\overline{p}-2.58\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n}} \leqq p \leqq \overline{p}+2.58\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n}}$$

したがって，(I) 母比率 p の 95% 信頼区間の幅は，

$$\cancel{\overline{p}}+1.96\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n}}-\left(\cancel{\overline{p}}-1.96\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n}}\right)=2\times1.96\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n}}$$

となるんだね。同様に，(II) 母比率 p の 99% 信頼区間の幅は，

$$2 \times 2.58\sqrt{\frac{\overline{p}\cdot(1-\overline{p})}{n}}$$ となる。

それでは問題の解答に戻ろう。

(iii) 母比率 p_Y の 95% 信頼区間の幅は，$0.067 \leqq p_Y \leqq 0.133$ ……① より，

$0.133 - 0.067 = 0.066$ ……② となる。

次に標本数 $n_X = 600$ のみを n'_X に変えて，母比率 p_X の 99% 信頼区間の幅を②と等しくすることにする。まず，p_X の 99% 信頼区間の幅は，

$\overline{p}_X = 0.4$ より，

$$2 \times 2.58\sqrt{\frac{\overline{p}_X(1-\overline{p}_X)}{n'_X}} = 2 \times 2.58\sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{n'_X}} = 2 \times 2.58\sqrt{\frac{0.24}{n'_X}}$$ ……③ となる。

②と③は等しいので，

$$2 \times 2.58\sqrt{\frac{0.24}{n'_X}} = 0.066 \qquad \sqrt{\frac{0.24}{n'_X}} = \frac{0.033}{2.58} = \frac{33}{2580} = \frac{11}{860}$$

両辺を 2 乗して，

$$\frac{0.24}{n'_X} = \left(\frac{11}{860}\right)^2$$ よって，

$n'_X = 0.24 \times \left(\frac{860}{11}\right)^2 = 1466.975\cdots$ となるので，少数第 1 位を四捨五入して，$n'_X = 1467$ となる。

元の p_X の 99% 信頼区間の幅は，$0.452 - 0.348 = 0.104$ であったのだ

$0.348 \leqq p_X \leqq 0.452$ より

けれど，これを 0.066 に縮小させるためには，標本数 $n_X = 600$ を $n'_X = 1467$ へと大きく増加させないといけないことが分かったんだね。

● 母分散 σ^2 の区間推定は χ^2 分布が決め手だ！

母分散 σ^2 の区間推定では，標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ から，新たな確率変数 V を「$V = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$ と定義する。これが，自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布に従う」ことから σ^2 の区間推定が可能になる。

また，同じことが出てきたね！