$$\therefore I(s)=\frac{V_0}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right) \cdots\cdots ②$$ となる。

$I(s)$ が，s の式として求まったので，後は，逆変換するだけだ。

②の両辺をラプラス逆変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[I(s)]}_{i(t)}=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{V_0}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)\right]}$$

$$\frac{V_0}{R}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right]$$

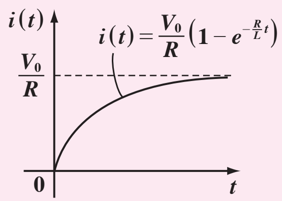
$$=\frac{V_0}{R}\left(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1}-\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right]}_{e^{-\frac{R}{L}t}}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$$

$$\therefore i(t)=\frac{V_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$ となって，

P200 で求めた結果と見事に一致するんだね。面白かったでしょう？



● *LC* 回路もラプラス変換で解いてみよう！

次に，**P201** で解読した *LC* 回路についても，ラプラス変換を利用して解いてみよう。ただし，ここでは新たに $\cos at$ と $f''(t)$ のラプラス変換の辞書が必要となるので，これらのラプラス変換をまず求めておこう。

(i) $\cos at=\frac{1}{2}(e^{iat}+e^{-iat})$ とおいて，

オイラーの公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ から導ける。

このラプラス変換を求めると，

$$\mathcal{L}[\cos at]=\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{iat}+e^{-iat})\right]=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\mathcal{L}[e^{iat}]}_{\frac{1}{s-ia}}+\underbrace{\mathcal{L}[e^{-iat}]}_{\frac{1}{s-(-ia)}}\right)$$

公式 $\mathcal{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$

よって，

$\mathcal{L}[\cos at]$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia}+\frac{1}{s+ia}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s+\cancel{ia}+s-\cancel{ia}}{(s-ia)(s+ia)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2-i^2a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}$$ となる。次に，

表 2

$f(t)$(原関数)	$F(s)$(像関数)
$\cos at$ $(t \geqq 0)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

(ii) $f''(t)$ のラプラス変換を求めると，(ただし，$s>0$ とする。)

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \int_0^\infty f''(t)\,e^{-st}dt$$

$$= \underbrace{[f'(t)\,e^{-st}]_0^\infty}_{} - \underbrace{\int_0^\infty f'(t)\cdot(-s)\,e^{-st}dt}_{}$$

$\lim_{p\to\infty}[f'(t)e^{-st}]_0^p$

$= \lim_{p\to\infty}\{\underbrace{f'(p)e^{-sp}}_{0} - f'(0)e^0\}$

$= -f'(0) \quad (\because s>0)$

$-s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$

$= -s\mathcal{L}[f'(t)]$

$= -s\{sF(s)-f(0)\}$

公式

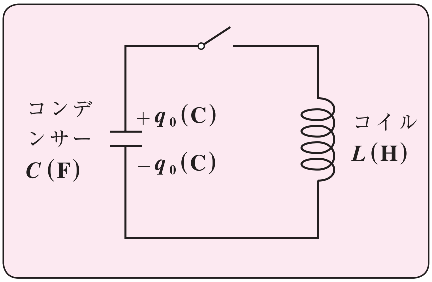
$\mathcal{L}[f'(t)]$

$= sF(s)-f(0)$

$$= -f'(0)+s\{sF(s)-f(0)\} = s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$ となる。

以上の結果を，表 2 にまとめて示す。これを新たな辞書として利用すればいいんだね。

それでは例題 38(P201) で解説した右図のような LC 回路を，ラプラス変換を使って解いてみよう。



初めに，$\pm q_0$(C) の電荷がコンデンサーに帯電しているとき，時刻 $t=0$ でスイッチを閉じて以降の電荷 $q(t)$ は，次の微分方程式をみたすんだね。

$$\ddot{q}(t) = -\frac{1}{LC}\,q(t) \quad \cdots\cdots①$$ (初期条件：$q(0)=q_0$ ，$\dot{q}(0)=0$)

$t=0$ での $q(t)$ の変化はゆるやかなはずだから，$\dot{q}(0)=0$ とする。

ここで，$q(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[q(t)] = Q(s)$ とおくこととして，①の両辺をラプラス変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[\ddot{q}(t)]}_{s^2Q(s)-sq(0)-\dot{q}(0)} = \mathcal{L}\left[-\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2\,(\text{定数})\text{とおく。}}q(t)\right] \qquad s^2Q(s) - s\underbrace{q(0)}_{q_0} - \underbrace{\cancel{\dot{q}(0)}}_{0} = -\omega^2 Q(s)$$

公式：$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$$(s^2+\omega^2)Q(s) = sq_0 \qquad \therefore Q(s) = \frac{q_0\cdot s}{s^2+\omega^2} \quad \cdots\cdots②$$ となる。

よって，②の両辺をラプラス逆変換して $q(t)$ を求めると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Q(s)]}_{q(t)} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[q_0\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]}_{q_0\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = q_0\cos\omega t}$$ より，

公式：$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at$

$q(t) = q_0\cos\omega t$ ……③ となって，**P203** と同じ結果が導ける。

後は，③の両辺を t (時刻) で微分すれば電流 $i(t)$ も，

$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = -q_0\omega\sin\omega t$ と求めることができるんだね。大丈夫？

この *Appendix* では，ラプラス変換の入門ということで，本当に基礎的なものしか扱っていないんだけれど，これでも，ラプラス変換の威力を十分にご理解頂けたと思う。さらに，本格的なラプラス変換をマスターされたい方は，**「ラプラス変換キャンパス・ゼミ」(マセマ)** で是非勉強して頂きたい。

天才ヘヴィサイドが考案し，その後，カールソンやブロムウィッチ等，優秀な数学者によって洗練された理論として組み立てられた，奥深くて面白いこの“ラプラス変換”の世界を十分に堪能して頂けると思います。