Appendix（付録）

ラプラス変換入門

電気回路の解法で，“ラプラス変換”(*Laplace transformation*) を利用される先生もいらっしゃると思う。ラプラス変換を使うと，様々な電気回路の微分方程式を，積分計算することなく，代数方程式を解く要領で，簡単に解けて便利だからだ。この概略について，ここで解説しよう。

● ラプラス変換の定義をマスターしよう！

時刻 t を独立変数にもつある関数 $f(t)$ に対して，これに e^{-st} をかけて区間 $0 \leqq t < \infty$ において，t で積分したものをラプラス変換と言うんだね。まず，このラプラス変換の定義を下に示そう。

ラプラス変換の定義

$[0,\ \infty)$ で定義される t の関数 $f(t)$ に，次のような s の関数 $F(s)$ を対応させる演算子を $\mathcal{L}$ とおき，これを “**ラプラス変換**” と定義する。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \cdots\cdots(*1) \quad (s\text{：実数})$$

($f(t)$：原関数，$F(s)$：像関数 (または，$f(t)$のラプラス変換))

$(*1)$ から分かるように，t の関数 $f(t)e^{-st}$ を区間 $[0,\ \infty)$ で t により積分して，その t には，∞ と 0 が入るため，t はなくなるんだね。よって，この無限積分の結果，s が残って，ラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ は s の関数となるので，これを $F(s)$ とおくんだね。ここで，原関数 $f(t)$ とその像関数 (ラプラス変換) $F(s)$ は，1 対 1 に対応するものと考えて，

$f(t) \longleftrightarrow F(s)$　と表すことも覚えよう。そして，

(i) $f(t)$ から $F(s)$ への変換を，ラプラス変換と呼び，

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$　と表し，逆に

(ii) $F(s)$ から $f(t)$ への変換を，ラプラス逆変換と呼び，

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$　と表すことも，頭に入れておこう。

ン？抽象的で分かりづらいって!? いいよ，具体例で示そう。

$(ex1)$ $f(t)=1$ のとき，$s>0$ として，

$$F(s)=\int_0^{\infty}1\cdot e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\underbrace{\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}}_{\lim\limits_{p\to\infty}\left[e^{-st}\right]_0^{p}=\lim\limits_{p\to\infty}(\underbrace{e^{-sp}}_{0}-\underbrace{e^{0}}_{1})=-1}=-\frac{1}{s}\times(-1)=\frac{1}{s}$$

$(ex2)$ $f(t)=e^{at}$ のとき，$s>a$ として，

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{at}\cdot e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}dt$$

$$=-\frac{1}{s-a}\underbrace{\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^{\infty}}_{\lim\limits_{p\to\infty}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^{p}=\lim\limits_{p\to\infty}(\underbrace{e^{-(s-a)\cdot p}}_{0}-\underbrace{e^{0}}_{1})=-1}=-\frac{1}{s-a}\times(-1)=\frac{1}{s-a}$$

以上より，次の関係が成り立つんだね。

(i) $f(t)=1\longleftrightarrow F(s)=\dfrac{1}{s}$ $(s>0)$

(ii) $f(t)=e^{at}\longleftrightarrow F(s)=\dfrac{1}{s-a}$ $(s>a)$

よって，(i) から，$\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$，また $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]=1$ と表せるし，また，

(ii) から，$\mathcal{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$，また $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right]=e^{at}$ と表せるんだね。

● ラプラス変換の性質も押さえよう！

一般論として，$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，かつ $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$ のとき，a，b を実数定数とすると，次の公式が成り立つ。

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=aF(s)+bG(s)\quad\cdots\cdots(*2)$$

$(*2)$ は，ラプラス変換の線形性と呼ばれる公式で，これは，次のように証明できる。

$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=\displaystyle\int_0^{\infty}\{af(t)+bg(t)\}e^{-st}dt$ より

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = a\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}_{F(s)} + b\underbrace{\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt}_{G(s)}$$

項別に積分した。

$$= aF(s)+bG(s)$$

また，この逆変換についても，次の線形性の公式が成り立つ。

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)] = af(t)+bg(t) \quad \cdots\cdots(*2)'$$

次に，$f(t)$ の導関数 $f'(t)$ のラプラス変換も調べてみよう。$s>0$ として，

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

$$= \underbrace{[f(t)e^{-st}]_0^\infty}_{} - \underbrace{\int_0^\infty f(t)\cdot(e^{-st})'dt}_{}$$

部分積分：

$$\int_0^\infty f'\cdot g\,dt = [f\cdot g]_0^\infty - \int_0^\infty f\cdot g'dt$$

$$\lim_{p\to\infty}[f(t)e^{-st}]_0^p = \lim_{p\to\infty}\{\underbrace{f(p)e^{-sp}}_{0} - \underbrace{f(0)e^0}_{f(0)}\} = -f(0)$$

$$\int_0^\infty f(t)\cdot(-s)e^{-st}dt = -s\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}_{F(s)} = -s\cdot F(s)$$

ただし，$f(p)$ は $\lim_{p\to\infty} f(p)e^{-sp}=0$ をみたすものとする。

$$= -f(0)-(-s)F(s) = sF(s)-f(0) \quad \cdots\cdots(*3)$$ となるんだね。

これまでの原関数 $f(t)$ と像関数 (ラプラス変換) $F(s)$ の関係を表 1 にまとめて示しておこう。このように，表にまとめることにより，$f(t)$ と $F(s)$ の関係が，ちょうど英和や和英の辞書のように利用できるようになるんだね。

これで，必要最小限だけれど，準備が整ったので，いよいよ微分方程式の解法の解説に入ろう。

表 1

$f(t)$(原関数)	$F(s)$(像関数)
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$

● ラプラス変換で微分方程式を解いてみよう！

微分方程式は，(ⅰ) 積分により解析的に解く手法と，(ⅱ) ラプラス変換 (と逆変換) を用いて解く方法の 2 通りがあるんだね。これを図 1 に模式図で表すので，まず頭に入れておこう。

図 1　微分方程式の解法

(ⅰ) 解析的な手法

$f(t)$ の微分方程式 → 直接解析的に解く。 → $y=f(t)$ を求める。

(ⅱ) ラプラス変換による解法

$f(t)$ の微分方程式 $\xrightarrow{\text{ラプラス変換}}$ $F(s)$ の代数方程式 → $F(s)$ を求める。 $\xrightarrow{\text{ラプラス逆変換}}$ $y=f(t)$ を求める。

次の簡単な例題を使って，具体的に示そう。

$(ex3)$ 微分方程式 $f'(t)=f(t)$ ……① (初期条件：$f(0)=2$) を解こう。

(ⅰ) まず解析的に解いてみよう。$y=f(t)$ とおくと，$f'(t)=y'=\dfrac{dy}{dt}$ より

①は，$\dfrac{dy}{dt}=y$　よって，$\dfrac{1}{y}dy=1\cdot dt$ ← 変数分離形

$$\int\frac{1}{y}dy=\int 1\cdot dt \quad \therefore \log|y|=t+C_1 \qquad |y|=e^{t+c_1}$$

$$y=\underbrace{\pm e^{c_1}}_{C\,(\text{積分定数})\text{とおく}}\cdot e^t \qquad \therefore y=f(t)=C\cdot e^t\ (C=\pm e^{c_1})$$

これで，積分定数 C の値が求まった！

ここで，初期条件 $f(0)=2$ より，$f(0)=C\cdot e^0=C=2$

$\therefore f(t)=2e^t$　となる。……………………………………………(答)

(ⅱ) 次に，ラプラス変換を使って解いてみよう。

$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$　とおく。①の両辺をラプラス変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[f'(t)]}_{sF(s)-f(0)\ ((*3)\text{より})}=\underbrace{\mathcal{L}[f(t)]}_{F(s)} \qquad s\cdot F(s)-\underbrace{f(0)}_{2\,(\text{初期条件より})}=F(s)$$ ← $F(s)$ の代数方程式

$$(s-1)F(s)=2 \qquad \therefore F(s)=\frac{2}{s-1} \quad \cdots\cdots②$$ ← $F(s)$ が求まった！後は，この逆変換をとって答えだ。

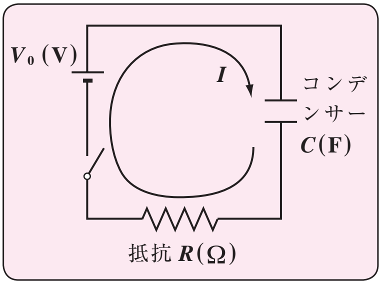
②の両辺をラプラス逆変換して，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F(s)]}_{f(t)}=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right]=\underbrace{2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]}_{e^{1\cdot t}}$$ ← 線形性より，定数 2 を表に出せる！

$e^{1\cdot t}$ ← $\dfrac{1}{s-a} \longleftrightarrow e^{at}$

$\therefore f(t)=2e^t$　となって，同じ答えが導けた！………………(答)

● 電気回路をラプラス変換で解いてみよう！



右に示すような例題 **36** (**P197**) で扱った **RC** 回路を，ラプラス変換で解いてみよう。電荷を $q(t)$ とおき，このラプラス

ラプラス変換では，原関数を小文字の $q(t)$，像関数を大文字で $Q(s)$ と表すことにする。

変換を $Q(s)=\mathcal{L}[q(t)]$ とおこう。

P197 で既に解説したように，$q(t)$ の微分方程式は，

$$\underbrace{V_0}_{\text{定数}}=\underbrace{R}_{\text{定数}}\dot{q}(t)+\underbrace{\frac{1}{C}}_{\text{定数}}q(t) \quad \cdots\cdots(\mathrm{a})$$

（初期条件：$q(0)=0$）となる。

(a)の両辺をラプラス変換すると，

$$\mathcal{L}[V_0]=\mathcal{L}\left[R\dot{q}(t)+\frac{1}{C}q(t)\right]$$

よって，線形性より

$$V_0\underbrace{\mathcal{L}[1]}_{\frac{1}{s}}=R\underbrace{\mathcal{L}[\dot{q}(t)]}_{sQ(s)-\underbrace{\cancel{q(0)}}_{0}}+\frac{1}{C}\underbrace{\mathcal{L}[q(t)]}_{Q(s)}$$

$\dot{q}(t)$ は $q'(t)$ と同じ

$\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$
$\mathcal{L}[\dot{q}(t)]=sQ(s)-q(0)$

$$\frac{V_0}{s}=R\cdot sQ(s)+\frac{1}{C}Q(s) \quad \cdots\cdots(\mathrm{b})$$

$$\left(Rs+\frac{1}{C}\right)Q(s)=\frac{V_0}{s}$$

これから，$Q(s)$ を求めると，

部分分数に分解した！

$$Q(s)=\frac{V_0}{s\left(Rs+\frac{1}{C}\right)}=\frac{V_0}{R}\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{V_0}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}C\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

$$\therefore\ Q(s)=\underbrace{CV_0}_{\text{定数}}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\underbrace{RC}_{\text{定数}}}}\right) \quad \cdots\cdots(\mathrm{c})$$

$Q(s)$ が求まったので，後は，これを逆変換するだけだね。

(c)の両辺をラプラス逆変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Q(s)]}_{q(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[CV_0\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)\right]$$

$$CV_0\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]$$

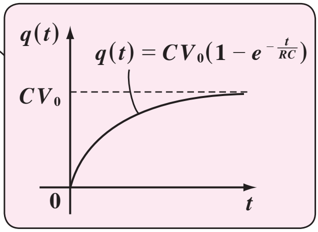
$$=CV_0\left(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1}-\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right]}_{e^{-\frac{1}{RC}t}}\right)$$

$$=CV_0\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$$

$\therefore\ q(t)=CV_0\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ となって



P198 で求めた結果と一致するんだね。

このように，時刻 t の領域では，(a)の微分方程式で表されていたものが，ラプラス変換した後の s の領域では，(b)のような s の代数方程式になってしまうところが，面白いんだね。そして(b)を解いて，$Q(s)=$ (s の式) の形にした後，この両辺に逆ラプラス変換を行えば，$q(t)$ が求まるんだね。このように，ラプラス変換と逆変換をうまく利用することにより，積分計算を一切行うことなく，$q(t)$ が求められるんだね。大丈夫だった？

この *Appendix* では，ラプラス変換の入門ということで，本当に基礎的なものしか扱っていないんだけれど，これでも，ラプラス変換の威力を十分にご理解頂けたと思う。さらに，本格的なラプラス変換をマスターされたい方は，**「ラプラス変換キャンパス・ゼミ」(マセマ)** で是非勉強して頂きたい。奥深くて面白いラプラス変換の世界を十分に堪能して頂けると思う。