参考(演習問題 103)

$M=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ とおくと，$\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{bmatrix}$ で，$\underline{\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}}$ …① $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$F(n+1)=MF(n)\ \ (n=0,1,2,\cdots)$ のとき，$F(n)=M^n\cdot F(0)$ となる。(等比関数列の考え方)

より，$\underline{\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}=M^n\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix}}$ ……② となる。

よって，②の両辺の $n\to\infty$ の極限をとると，

$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}M^n\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix}$ ……②′ となるので，$M^n$ を求めて，極限 $\lim_{n\to\infty}M^n$ を求めればいいんだね。では実際に $M^n$ を求めてみよう。ケーリー・ハミルトンの定理より，

ケーリー・ハミルトンの定理
$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ のとき，
$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$$M^2-\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)M+\left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\right)E=O$$

$M^2-\frac{7}{5}M+\frac{2}{5}E=O$ ……④ となる。

ここで，④の $M$ に $x$，$E$ に $1$，$O$ に $0$ を代入して，$x$ の2次方程式に書き換えると，

$x^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}=0$ ……⑤ となる。

この⑤の左辺で $x^n$ を割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと，

$x^n=\underline{\left(x^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}\right)}Q(x)+ax+b$ ……⑥ となる。よって，

$x^n=\underline{(x-1)\left(x-\frac{2}{5}\right)}Q(x)+ax+b$ ……⑥′ となる。⑥′は恒等式より，

$x=1$ と $\frac{2}{5}$ を代入しても成り立つ。よって，

$$\begin{cases}1^n=\cancel{(1-1)\left(1-\frac{2}{5}\right)Q(1)}+a\cdot 1+b\\ \left(\frac{2}{5}\right)^n=\cancel{\left(\frac{2}{5}-1\right)\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right)Q\left(\frac{2}{5}\right)}+a\cdot\frac{2}{5}+b\end{cases}$$ より，

$$\begin{cases} a+b=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑦} \\ \dfrac{2}{5}a+b=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n & \cdots\cdots\text{⑧} \end{cases}$$ となる。

⑦−⑧より，$\dfrac{3}{5}a=1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ $\therefore a=\dfrac{5}{3}\left\{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right\}$

⑦より，$b=1-a=1-\dfrac{5}{3}\left\{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right\}=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ となる。よって，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3}\left\{1-\underbrace{\cancel{\left(\frac{2}{5}\right)^n}}_{0}\right\}=\frac{5}{3},\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{2}{3}+\underbrace{\cancel{\frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}}_{0}\right\}=-\frac{2}{3}$$

となる。ここで，行列 $M$ についても，

$x^n=\left(x^2-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{2}{5}\right)Q(x)+ax+b$ ……⑥ と同様の式：

$M^n=\underbrace{\cancel{\left(M^2-\dfrac{7}{5}M+\dfrac{2}{5}E\right)}}_{\boxed{O\ (\text{④のケーリー・ハミルトンの式より})}}Q(M)+aM+bE$ ……⑨ が成り立つ。

ケーリー・ハミルトンの式④より，⑨は，$M^n=aM+bE$ ……⑨´ となる。

よって，⑨´の両辺の $n\to\infty$ の極限を求めると，

$$\lim_{n\to\infty}M^n=\lim_{n\to\infty}(\underbrace{a}_{\boxed{\frac{5}{3}}}M+\underbrace{b}_{\boxed{-\frac{2}{3}}}E)=\frac{5}{3}M-\frac{2}{3}E$$

$$=\frac{5}{3}\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1-\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

が導けるんだね。

以上より，②´から，

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}a_n \\ b_n\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}M^n\begin{bmatrix}a_0 \\ b_0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$ となって，

**P204** と同じ結果が導けるんだね。面白かった？