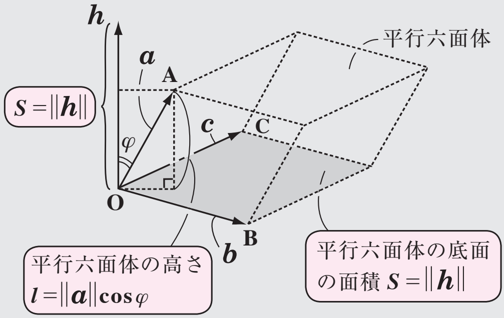
演習問題 11　● スカラー 3 重積 ●

座標空間上に 4 点 O，A(2，α，3)，B(1，2，α)，C(-2，2，$-\alpha$) がある。(ただし，α は実数定数とする。) OA，OB，OC を 3 辺とする平行六面体の体積 V が 25 である。このとき，α の値を求めよ。

ヒント！ 右図のように，



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{c}$ とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を 2 辺にもつ平行四辺形の面積を S とおき，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の外積を $\boldsymbol{h}$ とおくと，
$S=\|\boldsymbol{h}\|=\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|$ となる。
この S は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を 3 辺にもつ平行六面体の底面積になる。次に，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{h}$ のなす角を $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，A からこの底辺に下した垂線の長さ，すなわち平行六面体の高さは，$\|\boldsymbol{a}\|\cos\varphi$ となる。
よって，この平行六面体の体積 V は，

$$V=\underbrace{S}_{\text{底面積}\|\boldsymbol{h}\|}\cdot\underbrace{\|\boldsymbol{a}\|\cos\varphi}_{\text{高さ}}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{h}\|\cos\varphi=\boldsymbol{a}\cdot\underbrace{\boldsymbol{h}}_{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$ と表せる。

この $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ の “**スカラー 3 重積**” というんだね。ここで，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ のとき $\cos\varphi<0$ となる。よって，これまで考慮に入れると，この平行六面体の体積 V は，次式で求められるんだね。大丈夫？

$V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ ……………(＊)

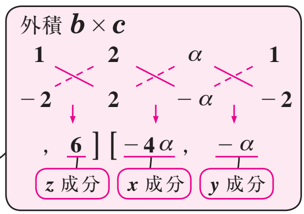
解答＆解説

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\ \alpha\\ 3\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ \alpha\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-2\\ 2\\ -\alpha\end{bmatrix}$ とおくと，OA，OB，OC を 3 辺にもつ平行六面体の体積 $V=25$ より，

$V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=25$ ……………① よって

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\pm 25$ ………………①′ となる。

ここで，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-4\alpha\\ -\alpha\\ 6\end{bmatrix}$ より，



$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{bmatrix}2\\ \alpha\\ 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\alpha\\ -\alpha\\ 6\end{bmatrix}$$

$=2\cdot(-4\alpha)+\alpha\cdot(-\alpha)+3\cdot6=-\alpha^2-8\alpha+18$ ……②となる。

②を①´に代入して，$-\alpha^2-8\alpha+18=\pm25$ ……③　　よって，③より，

(ⅰ) $-\alpha^2-8\alpha+18=25$ のとき，

$\alpha^2+8\alpha+7=0$　　$(\alpha+1)(\alpha+7)=0$

$\therefore\ \alpha=-1,\ -7$

$ax^2+2b'x+c=0$ の解
$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

(ⅱ) $-\alpha^2-8\alpha+18=-25$ のとき，

$\alpha^2+8\alpha-43=0$　　$\alpha=-4\pm\sqrt{4^2-1\cdot(-43)}$

$\therefore\ \alpha=-4\pm\sqrt{59}$

以上(ⅰ)，(ⅱ)より，求める α の値は，

$\alpha=-1,\ -7,\ -4\pm\sqrt{59}$ である。……………………………………(答)

参考

$\boldsymbol{a}=[x_1,\ y_1,\ z_1]$，$\boldsymbol{b}=[x_2,\ y_2,\ z_2]$，$\boldsymbol{c}=[x_3,\ y_3,\ z_3]$ のスカラー3

行ベクトルで表した！

重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を順に第1行，第2行，第3行とする行列式(P46)

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

………(＊)´で表されることも，覚えておくと便利だ。

今回の問題にも，この公式を用いると，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}2 & \alpha & 3\\ 1 & 2 & \alpha\\ -2 & 2 & -\alpha\end{vmatrix}$$

3行×3列の行列式なので，
サラスの公式(P46)を用いた！

$=\underline{2^2\cdot(-\alpha)+\alpha^2\cdot(-2)+3\cdot2\cdot1-3\cdot2\cdot(-2)-2^2\alpha-(-\alpha)\cdot1\cdot\alpha}$

$=-4\alpha-2\alpha^2+6+12-4\alpha+\alpha^2$

$=-\alpha^2-8\alpha+18$　　となって，同じ結果が導けるんだね。

演習問題 12　● ベクトル 3 重積 (I) ●

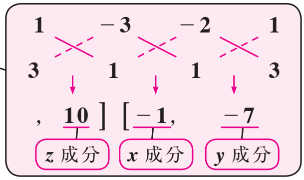
$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ について

(1) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ。　(2) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を求めよ。

ヒント！ 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ について，$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を “ベクトル 3 重積” という。この結果はベクトルで，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \underbrace{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})}_{\text{定数}}\boldsymbol{b} - \underbrace{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}_{\text{定数}}\boldsymbol{c}$ で表されることも覚えておくと便利だ。

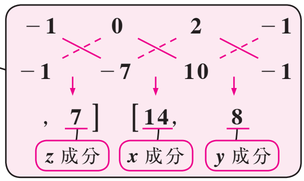
解答＆解説

(1) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}$ ……①



①より，求める $\underbrace{\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})}_{\text{ベクトル 3 重積}}$ は，

$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$



となる。………………………………(答)

(2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \times 3 + \cancel{0 \times 1} + 2 \times 1 = -1$ ……………………②

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = -1 \times 1 + \cancel{0 \times (-3)} + 2 \times (-2) = -5$ ……③

よって，②，③を用いて，

$\underbrace{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})}_{-1(\text{②より})}\boldsymbol{b} - \underbrace{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}_{-5(\text{③より})}\boldsymbol{c} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+15 \\ 3+5 \\ 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

…………………(答)

公式：$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ が成り立つことが確認できたね。

演習問題 13 ● ベクトル 3 重積 (Ⅱ) ●

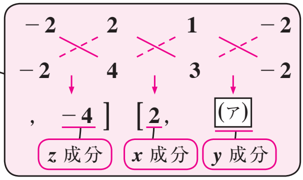
$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ について

(1) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ。　(2) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を求めよ。

ヒント！ 同様に，ベクトル 3 重積の問題を解いてみよう！

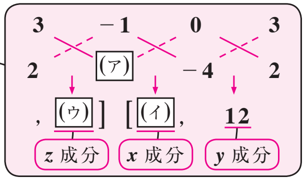
解答＆解説

(1) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \boxed{(ア)} \\ -4 \end{bmatrix}$ ……①



①より，求める $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は，

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ \boxed{(ア)} \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(イ)} \\ 12 \\ \boxed{(ウ)} \end{bmatrix}$$



となる。 ……………………………………(答)

(2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \boxed{(エ)}$ ……②

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{(オ)}$ ……③

よって，②，③を用いて，

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boxed{(エ)} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \boxed{(オ)} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(イ)} \\ 12 \\ \boxed{(ウ)} \end{bmatrix}$$ ……(答)

公式：$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ が，やっぱり成り立っているね。

解答　(ア) 4　(イ) 4　(ウ) 14　(エ) −10　(オ) −8