解析力学では，さらに次の“**ハミルトンの正準方程式**”(***Hamilton's canonical equation***)も利用する。

ハミルトンの正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ \cdots\cdots(*b),\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \cdots\cdots(*b)'\quad (i=1,2,\cdots,f)$$

（ただし，H：ハミルトニアン，q_i：一般化座標，t：時刻，f：自由度，
p_i：一般化運動量，$p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ \cdots\cdots(*c)$ （L：ラグランジアン），
$H=\displaystyle\sum_{i=1}^{f}p_i\dot{q}_i-L\ \cdots\cdots(*d)$ ）

このハミルトンの正準方程式は，$(*b)$ と $(*b)'$ の 2 組が対（つい）になった方程式で，そして 2 組の独立変数 q_i(一般化座標)と p_i(一般化運動量)をもつ。

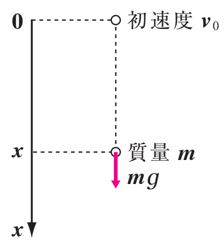
また，ハミルトニアン H は，厳密には，$(*d)$ から導かれる。しかし，ここでは概略の解説なので，簡単に $H=T+U\ \cdots\cdots(*d)'$ と覚えておいていい。

したがって，$\begin{cases}\text{ラグランジアン } L=T-U\\ \text{ハミルトニアン } H=T+U\end{cases}$ と覚えておくと忘れないはずだ。

このハミルトンの正準方程式は，量子力学など，応用範囲が広い。
そして，これもニュートンの運動方程式と等価と言える。

これについても，同様の自由落下の問題で確認しておこう。これは，自由度 $f=1$ なので，一般化座標 $q_1=x$，一般化運動量 $p_1=p_x$ とおくと，ハミルトンの正準方程式は次のようになる。

質点の自由落下



$$\begin{cases}(\mathrm{i})\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_x}\ \cdots\cdots\cdots①\\[2ex] (\mathrm{ii})\ \dfrac{dp_x}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}\ \cdots\cdots②\end{cases}$$

$f=1$ より，正準方程式
$\dfrac{dq_1}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_1}$，$\dfrac{dp_1}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}$
の q_1 を x，p_1 を p_x とおいた。

まず，運動量 $p_x = m\dot{x}$ より，$\dot{x} = \dfrac{p_x}{m}$ ………………………③

また，ハミルトニアン $H = T + U = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$ ……④

④に③を代入して，

$H = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{p_x}{m}\right)^2 - mgx$ より，

$H = \dfrac{p_x{}^2}{2m} - mgx$ ……④′ となる。

H は，q_1 と p_1，すなわち x と p_x の式で表す。

よって，④′ を①と②にそれぞれ代入すればよい。

(ⅰ) ④′ を①に代入して，

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p_x}\left(\underbrace{\frac{1}{2m}}_{\text{定数扱い}}p_x{}^2 - \cancel{mgx}\right) = \frac{1}{2m}\cdot 2p_x = \frac{p_x}{m}$$ となる。

これは，③と同じ運動量の式だ！

(ⅱ) ④′ を②に代入して，

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\cancel{\frac{1}{2m}p_x{}^2} - \underbrace{mgx}_{\text{定数扱い}}\right) = mg$$ となる。

$\dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$

これから，$m\ddot{x} = mg$ となって，ニュートンの運動方程式が導けた。つまり，これで，ハミルトンの正準方程式も，ニュートンの運動方程式と等価であることが示せた。

しかし，この例題を解いて，ニュートンの運動方程式は，(ⅱ)の②のみから導かれているので，(ⅰ)の①は不要ではないか？と思われるかも知れない。しかし，ここで詳しい解説はできないが，ハミルトンの正準方程式は，2 組の独立変数 (正準変数) q_i，p_i に対応して，2 組の対になった方程式で 1 つの意味をなしていると考えて頂きたい。

詳しくは，「**解析力学キャンパス・ゼミ**」(マセマ) で学習されることを勧める。