

## 微分と積分の融合問題

絶対暗記問題 77

難易度 ★★

CHECK1

CHECK2

CHECK3

$f(x)$  を  $x = -1$  で極大,  $x = 2$  で極小となる 3 次関数で  $\int_0^2 f'(x) dx = -5$  を満たすものとする。

(1)  $f'(x)$  を求めよ。(2)  $f(x)$  の極大値と極小値の差を求めよ。 (熊本大)

**ヒント!** (1) 3 次関数  $f(x)$  の極大値と極大値の条件と, その導関数  $f'(x)$  の定積分の条件から  $f'(x)$  を決定できる。(2) 極大値  $f(-1)$  と極小値  $f(2)$  の差は,  $f'(x)$  の定積分  $\int_2^{-1} f'(x) dx$  で表されることが分かるんだね。

## 解答&amp;解説

(1) 3 次関数  $f(x)$  が  $x = -1$  で極大,  $x = 2$  で極小となることより, 右図からこの導関数  $f'(x)$  は,  $x = -1$  と  $2$  で  $x$  軸と交わり, 下に凸の放物線であることが分かるので,

$$f'(x) = a(x+1)(x-2)$$

$$= a(x^2 - x - 2) \cdots \cdots \textcircled{1} \quad (a: \text{正の定数})$$

と表される。ここで, 定積分の条件式:

$$\int_0^2 f'(x) dx = -5 \cdots \cdots \textcircled{2} \text{ に } \textcircled{1} \text{ を代入して,}$$

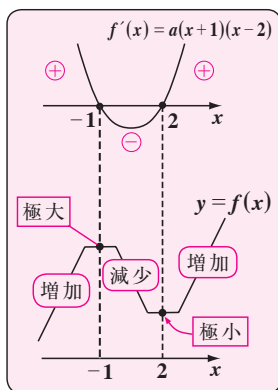
$$a(x^2 - x - 2) \text{ (} \textcircled{1} \text{ より)}$$

$$a \int_0^2 (x^2 - x - 2) dx = -5 \quad \text{よって, } -\frac{10}{3} a = -5, \quad a = 5 \times \frac{3}{10} \text{ より,}$$

$$\left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 - 4 = \frac{8}{3} - 6 = -\frac{10}{3}$$

$a = \frac{3}{2}$  となる。これを  $\textcircled{1}$  に代入すると, 導関数  $f'(x)$  は,

$$f'(x) = \frac{3}{2} (x^2 - x - 2) \cdots \cdots \textcircled{1}' \text{ となる。} \cdots \cdots \text{(答)}$$



(2)  $f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - x - 2)$  より,

3次関数  $f(x)$  の増減表は右のようになる。よって、この  $f(x)$  の

- { 極大値は  $f(-1)$  であり,
- { 極小値は  $f(2)$  となる。

$f(x)$  の増減表

$x$		-1		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、(極大値) - (極小値) =  $f(-1) - f(2)$  は、次のように定積分で表すことができる。これより、

求める極値の差は、

$$f(-1) - f(2) = \int_2^{-1} \underbrace{f'(x)}_{\frac{3}{2}(x^2 - x - 2)} dx$$

逆に見て、  
 $\int_2^{-1} f'(x) dx = [f(x)]_2^{-1}$   
 $= f(-1) - f(2)$   
 となることから分かるはずだ。

$$= \frac{3}{2} \int_2^{-1} (x^2 - x - 2) dx$$

$$= \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^{-1}$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left( \frac{8}{3} - 2 - 4 \right) \right\}$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 2 + 2 + 4 - \frac{1}{2} = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{4} \text{ である。} \dots\dots\dots (\text{答})$$

このように受験問題では、微分と積分は融合形式で出題されることも多いんだね。このような問題では、グラフや増減表を利用しながら解いていくといいよ。