例題4　留数定理を用いて，次の各1周線積分の値を求めよう。

(1) $\displaystyle\oint_{C_1}\frac{\sin z}{z^2}\,dz$　　$C_1：|z|=1$

(2) $\displaystyle\oint_{C_2}\frac{z^3}{(2z-1)^3}\,dz$　　$C_2：|z|=1$

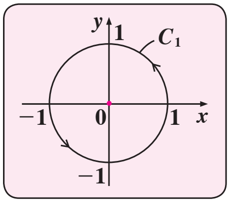
(1)，(2) は，P190 の例題3(1)，(2) と同じ問題

(3) $\displaystyle\oint_{C_3}\frac{z+2i}{(z^2+1)^3}\,dz$　　$C_3：|z-i|=1$

(3) は，P191 の例題4 と同じ問題

P190，191 の例題と同じ問題を，今回は留数定理を用いて解いてみて，同じ結果が導けることを確認しよう。

(1) $f_1(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ とおくと，C_1 内にある特異点は $z=0$ のみで，2 位の極であることが分かる。よって，その留数 R_1 を求めると，



$$R_1=\operatorname*{Res}_{z=0}f_1(z)=\underbrace{\cancel{\frac{1}{(2-1)!}}}_{\frac{1}{1!}=1}\lim_{z\to0}\underbrace{\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\{z^2f_1(z)\}}_{\frac{d(\sin z)}{dz}=\cos z}$$

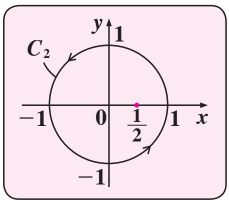
$$=\lim_{z\to0}\cos z=\cos0=1$$

よって，求める1周線積分の値は，

$$\oint_{C_1}\frac{\sin z}{z^2}\,dz=2\pi i\cdot R_1=2\pi i$$ となる。←例題 3(1) (P190) の結果と同じ

(2) $f_2(z)=\dfrac{z^3}{(2z-1)^3}=\dfrac{z^3}{8\left(z-\frac{1}{2}\right)^3}$ とおくと，

C_2 内にある特異点は，$z=\dfrac{1}{2}$ のみで，3 位の極であることが分かる。よって，その留数 R_2 を求めると，



$$R_2=\underset{z=\frac{1}{2}}{\mathrm{Res}}\, f_2(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3\cdot f_2(z)\right\}}_{\boxed{\left(\frac{z^3}{8}\right)''=\left(\frac{3}{8}z^2\right)'=\frac{3}{4}z}}$$

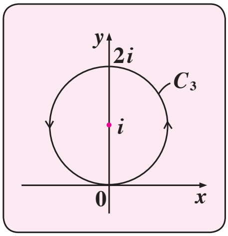
$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{3}{4}z=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$ となる。

よって，求める 1 周線積分の値は，

$$\oint_{C_2}\frac{z^3}{(2z-1)^3}\,dz=2\pi i\cdot R_2=2\pi i\cdot\frac{3}{16}=\frac{3}{8}\pi i$$ となる。

これは，例題 3(2) (P190) の結果と同じ

(3) $f_3(z)=\dfrac{z+2i}{(z^2+1)^3}=\dfrac{z+2i}{(z+i)^3\cdot(z-i)^3}$ とおくと，



C_3 内にある特異点は，$z=i$ のみで，3 位の極であることが分かる。よって，その留数 R_3 を求めると，

$$R_3=\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\, f_3(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\underbrace{\frac{d^2}{dz^2}\{(z-i)^3\cdot f_3(z)\}}$$

$$\left\{\frac{z+2i}{(z+i)^3}\right\}''=\left\{\frac{1\cdot(z+i)^3-(z+2i)\cdot3(z+i)^2}{(z+i)^6}\right\}'=\left\{\frac{z+i-3(z+2i)}{(z+i)^4}\right\}'$$

$$=\left\{\frac{-2z-5i}{(z+i)^4}\right\}'=\frac{-2\cdot(z+i)^4-(-2z-5i)\cdot4(z+i)^3}{(z+i)^8}=\frac{-2(z+i)+4(2z+5i)}{(z+i)^5}$$

$$=\frac{6z+18i}{(z+i)^5}=\frac{6(z+3i)}{(z+i)^5}$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{6\cdot(z+3i)}{(z+i)^5}=\frac{1}{2}\times\frac{6\times4i}{(2i)^5}=\frac{24}{2\times32}\times\frac{i}{i}=\frac{3}{8}$$ となる。

よって，求める 1 周線積分の値は，

$$\oint_{C_3}\frac{z+2i}{(z^2+1)^3}\,dz=2\pi i\cdot R_3=2\pi i\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{4}\pi i$$ となる。

これも，例題 4(P191) で計算した結果と一致することが確認できたんだね。