それでは，「**振動・波動キャンパスゼミ**」(**マセマ**) の中で解説した“減衰振動”と“過減衰”の微分方程式をラプラス変換を使って解いてみることにしよう。

例題 53　速度に比例する抵抗を受けて振動する重り **P** の位置 x が次の各微分方程式で表されるとき，これを解いてみよう。

(1) $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+10x(t)=0$ ………①　$(x(0)=0,\ \dot{x}(0)=6)$

(2) $\ddot{x}(t)+\dfrac{5}{6}\dot{x}(t)+\dfrac{1}{6}x(t)=0$ ……②　$(x(0)=2,\ \dot{x}(0)=-1)$

(1) が減衰振動の微分方程式で，(2) が過減衰の微分方程式なんだね。

$x(t)$ のラプラス変換を $X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$ と表すものとして，これらを実際に解いてみよう。

(1) ①の両辺をラプラス変換して，

$$\underbrace{\mathcal{L}[\ddot{x}(t)]}_{s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)}+2\underbrace{\mathcal{L}[\dot{x}(t)]}_{sX(s)-x(0)}+10\underbrace{\mathcal{L}[x(t)]}_{X(s)}=0$$

$$s^2X(s)-\cancel{s\underbrace{x(0)}_{0}}-\underbrace{\dot{x}(0)}_{6}+2\{sX(s)-\cancel{\underbrace{x(0)}_{0}}\}+10X(s)=0$$

$$(s^2+2s+10)X(s)=6$$

$$\therefore\ X(s)=\frac{6}{s^2+2s+10}=\frac{6}{(s+1)^2+9}\quad\cdots\cdots③$$ となる。

$X(s)$ が求まったので，③の両辺をラプラス逆変換して，解 $x(t)$ を求めてみよう。

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+1)^2+9}\right]$$

$$=e^{-1\cdot t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^2+9}\right]$$

$$=e^{-t}\cdot 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right]$$

公式：
$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=e^{at}\mathcal{L}[F(s)]$
$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{a}{s^2+a^2}\right]=\sin at$

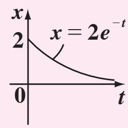
$$\therefore\ x(t)=2e^{-t}\cdot\sin 3t\quad\cdots\cdots④$$ となる。

減衰振動の解：

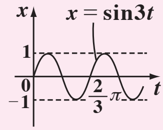
$x(t)=2e^{-t}\cdot\sin 3t$ のグラフの

概形を示すと，右図のようになる。

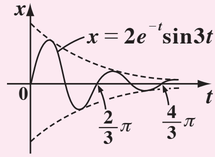
④式は，



と



の積なので，次のような減衰振動のグラフが得られる



(2) 次，過減衰の微分方程式②も解いてみよう。

②の両辺をラプラス変換して，

$$\underbrace{\mathcal{L}[\ddot{x}(t)]}_{s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)}+\frac{5}{6}\underbrace{\mathcal{L}[\dot{x}(t)]}_{sX(s)-x(0)}+\frac{1}{6}\underbrace{\mathcal{L}[x(t)]}_{X(s)}=0$$

$$s^2X(s)-s\underbrace{x(0)}_{2}-\underbrace{\dot{x}(0)}_{(-1)}+\frac{5}{6}\{sX(s)-\underbrace{x(0)}_{2}\}+\frac{1}{6}X(s)=0$$

$$s^2X(s)-2s+1+\frac{5}{6}sX(s)-\frac{5}{3}+\frac{1}{6}X(s)=0$$

$$\underbrace{\left(s^2+\frac{5}{6}s+\frac{1}{6}\right)}_{\left(s+\frac{1}{3}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)}X(s)=\underbrace{2s+\frac{2}{3}}_{2\left(s+\frac{1}{3}\right)}\qquad \cancel{\left(s+\frac{1}{3}\right)}\left(s+\frac{1}{2}\right)X(s)=2\cancel{\left(s+\frac{1}{3}\right)}$$

$$\therefore\ X(s)=\frac{2}{s+\frac{1}{2}}\quad\cdots\cdots⑤$$ となる。

$X(s)$ が求まったので⑤の両辺をラプラス逆変換して，解 $x(t)$ を求めると，

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=2e^{-\frac{1}{2}t}\quad\cdots\cdots⑥$$ となる。

$$\boxed{公式：\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}}$$

過減衰の解⑥のグラフの概形は右図のようになる。