Appendix （付録）

解析力学入門

力学の講義でも，**解析力学**(*analytical mechanics*)まで踏み込んで解説される先生もいらっしゃると思うので，本書でも，解析力学について，その基本を簡単に解説しておこう。

解析力学とは，これまで学んだニュートン力学を数学的により洗練された運動方程式で表現する力学のことなんだ。具体的には，ニュートンの運動方程式の代わりに，“**ラグランジュの運動方程式**”や“**ハミルトンの正準方程式**”を使って，様々な運動を記述するんだね。ここでは，解析力学入門ということで，“**ラグランジュの運動方程式**”に話をしぼって，その利用法を中心に解説していこう。

● ラグランジュの運動方程式を紹介しよう！

まず，ここで，“**ニュートンの運動方程式**”と“**ラグランジュの運動方程式**”(*Lagrange's equation of motion*)を対比して示そう。

(Ⅰ) ニュートンの運動方程式：

$$m_i\ddot{x}_i = f_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*1) \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ f)$$

(Ⅱ) ラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \cdots\cdots(*2) \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ f)$$

(x_i や q_i：座標，L：ラグランジアン，f：自由度)

(Ⅰ)のニュートンの運動方程式の方の意味は大丈夫だね。(Ⅱ)のラグランジュの運動方程式については，まだ意味はよく分からなくても，意外とスッキリした形をしていると思われたはずだ。ここで，(Ⅰ)と(Ⅱ)は等価な方程式であることを，後に示すことにして，まず，この 2 つに共通な $i = 1, 2, \cdots, f$ の，f について解説しておこう。この f は**自由度**と呼ばれる自然数のことなんだ。たとえば，1 質点の 2 次元運動では，自由度 $f = 2$ となるし，2 質点の 3 次元運動では，自由度 $f = 2\times 3 = 6$ となるんだね。

つまり，自由度 f とは，運動を記述するのに必要な未知の座標の数のことであり，同時に，それを求めるのに必要な運動方程式の数のことでもあるんだね。従って，(Ⅰ)，(Ⅱ) 共に，自由度 f の運動方程式を表しているんだね。

では，もう 1 度，ラグランジュの運動方程式を下に示して，各記号の意味を解説していこう。

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad \cdots\cdots(*2) \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \underbrace{f}_{\text{自由度}})$$

(ただし，L：ラグランジアン，q_i：一般化座標，t：時刻
$L=K-U$ （K：運動エネルギー，U：ポテンシャルエネルギー））

まず，$(*2)$ は，自由度 f の方程式なので，$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ f$ に対応して，具体的には，次の f 個の方程式を表していることに気を付けよう。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0\ ,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_3}=0\ ,\quad \cdots\cdots,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_f}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_f}=0$$

そして，ラグランジアン L は，$L=\underbrace{K}_{\text{運動エネルギー}}-\underbrace{U}_{\text{ポテンシャルエネルギー}}$ で定義される関数なんだ。この L は，(全)力学的エネルギー $E=K+U$ と対比して覚えると忘れないと思う。E と同様，L はスカラー量なんだね。次に，時刻が t で表されていることは問題ないと思う。

意味が分かりづらいのは，"**一般化座標**(いっぱんかざひょう)" $\underbrace{q_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ f)}_{\text{具体的には，} q_1,\ q_2,\ q_3,\ \cdots,\ q_f \text{ のこと}}$ だろうね。

これは，たとえば，2 質点の 2 次元運動の座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とおいたとき，これは自由度 $f=4$ の問題なので，一般化座標 $q_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を，$q_1=x_1$，$q_2=y_1$，$q_3=x_2$，$q_4=y_2$ とおけばいい。でも，これを単なる変数の置き換えと思ってはいけないよ。同じ 2 質点の 2 次元運動

が極座標で (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) と表されるときも，$q_1 = r_1$, $q_2 = \theta_1$, $q_3 = r_2$, $q_4 = \theta_2$ とおけるし，その他，球座標でも，さらにそれ以外の座標表示であっても，質点の位置を指定できるものであれば，何でも，このように，q_1, q_2, $\cdots$, q_f と置き換えて，なおかつ同じ形の $(*2)$ の f 個のラグランジュの運動方程式で，運動を記述することができるんだ。このように汎用性(はんようせい)の高い変数だから，この $q_i\ (i = 1, 2, \cdots, f)$ のことを一般化座標というんだね。

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \cdots (*2)$$

また，一般に物理学では，時間微分した変数に "・" (ドット) を使って表示することが多い。ここでも，$\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}\ (i = 1, 2, \cdots, f)$，すなわち $\dot{q}_i$ は一般化座標 q_i を時刻 t で微分したもの (時間微分) であることも頭に入れておこう。

そして，ラグランジアン $L = K - U$ は，一般に，q_1, q_2, $\cdots$, q_f, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\cdots$, $\dot{q}_f$ の関数，つまり，$L = L(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_f,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \cdots,\ \dot{q}_f)$ の多変数関数として表されるので，$(*2)$ に示すように，L は，q_i や $\dot{q}_i\ (i = 1, 2, \cdots, f)$ で偏微分することができるんだね。

以上が，ラグランジュの運動方程式についての基礎知識だ。ン？でも，どのようにして，ラグランジュの運動方程式 $(*2)$ が導かれるのか？知りたいって!? …，残念ながら，この導出はかなり本格的な解説が必要となるので，ここではできない。申し訳ない **m(_ _)m**

ここでは，ラグランジュの運動方程式は与えられたものとして，これがニュートンの運動方程式と等価 (同じもの) であることを，これから，いくつかの例を使って示していくつもりだ。エッ？ニュートンの運動方程式と同じものであるのなら，何故ラグランジュの運動方程式をもち出す必要があるのかって!? …，当然の疑問だね。その理由は，いくつかあるんだけれど，その中の **1** つとして，ニュートンの運動方程式よりも，慣れればラグランジュの運動方程式で運動を記述する方が，同じ形の方程式で機械

的に表せることが挙げられると思う。これから解説する具体例で，このラグランジュの運動方程式に慣れると共に，その便利さも実感して頂けると思う。

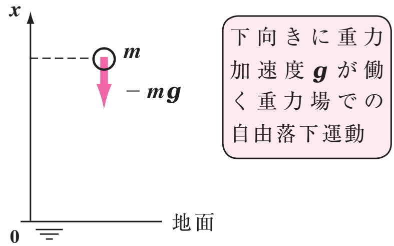
● 自由落下運動から始めよう！

まず，P40 で解説した自由落下運動を例にとってみよう。図 1 のような座標系をとれば，1 つの質点の 1 次元運動なので，この自由度は当然 $f = 1$ で，ニュートンの運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -mg \quad \cdots\cdots ①$$

と表されることは大丈夫だね。

図 1　自由落下運動



では，このラグランジュの運動方程式 (＊2) から，この①を導いてみよう。まず，ラグランジアン L は，$L = \underbrace{K}_{\frac{1}{2}m\dot{x}^2} - \underbrace{U}_{mgx}$ より，

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \quad \cdots\cdots ②$$ となる。

ここで，$f = 1$ より，一般化座標は，q_1 のみだけれど，$q_1 = x$ のことなので，ここではそのまま x を用いた。

②を，x と $\dot{x}$ でそれぞれ偏微分すると，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{定数扱い}} m\dot{x}^2 - \underbrace{\cancel{mgx}}_{\text{定数扱い}}\right) = \frac{1}{2}m\cdot 2\dot{x} = m\dot{x} \quad \cdots\cdots ③$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\cancel{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}}_{\text{定数扱い}} - \underbrace{mgx}_{\text{定数扱い}}\right) = -mg\cdot 1 = -mg \quad \cdots\cdots ④$$

L は x と $\dot{x}$ の 2 変数関数より，x と $\dot{x}$ により独立に偏微分できる。

よって，③と④をラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}}_{m\dot{x}}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{(-mg)} = 0 \quad \cdots\cdots (＊2)$$ に代入すると，

③，④より

$\underbrace{\dfrac{d}{dt}(m\dot{x})}_{m\ddot{x}} + mg = 0$ より，$m\ddot{x} + mg = 0$

ニュートンの運動方程式
$m\ddot{x} = -mg$ ……①

∴ニュートンの運動方程式：$m\ddot{x} = -mg$ ……①　が導けるんだね。

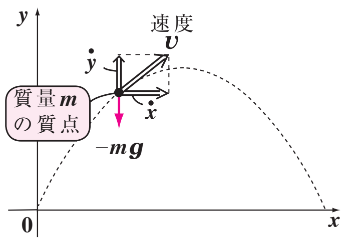
でもここで，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ のことだから，本当に x と $\dot{x}$ は独立な変数として扱えるのか，疑問が残るって？しかし，この自由落下の問題でも，質点に与える初速度を変化させれば，同じ位置 x における質点の速度 $\dot{x}$ も自由に変わり得るからね。よって，x と $\dot{x}$ は独立な変数と考えていいんだね。

これを敷衍（ふえん）すれば，自由度 f のときの一般化座標とその時間微分 q_1，q_2，…，q_f，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_f$ の $2f$ 個の変数もすべて独立な変数として扱えることをご理解頂けると思う。

● 放物運動も調べてみよう！

今度は，1 質点の 2 次元運動（自由度 $f = 2$）の例として，図 2 に示すような xy 座標系において鉛直下向きに重力加速度 g が働く重力場における，空気抵抗を受けない場合の放物運動について調べてみよう。

図 2　空気抵抗のない場合の質点の放物運動



これは，P90 でも示したように，質点に働く力は，y 軸の負の向きの $-mg$ だけなので，ニュートンの運動方程式は，次のようになるのは大丈夫だね。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)} \\ m\ddot{y} = -mg & \cdots\cdots\text{(b)} \end{cases}$$

では，これをラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \cdots\cdots(*2)\ (i = 1,\ \underbrace{2}_{\text{自由度 } f=2})$$

で表してみよう。

今回は，自由度 $f=2$ より，一般化座標とその時間微分の 4 つの独立変数は，$q_1=x$，$q_2=y$，$\dot{q}_1=\dot{x}$，$\dot{q}_2=\dot{y}$ となるんだけれど，ここでも，x，y，$\dot{x}$，$\dot{y}$ の形のままで，表してみることにする。まず，ラグランジアン L は，

$$L=\underbrace{K}_{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}-\underbrace{U}_{mgy}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy$$ となるのはいいね。

ラグランジュの運動方程式は，$f=2$ より，次の 2 つだね。

$$\begin{cases}(\text{i})\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(\text{c}) \leftarrow \boxed{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=0 \text{ のこと}} \\ (\text{ii})\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots(\text{d}) \leftarrow \boxed{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_2}=0 \text{ のこと}}\end{cases}$$

(i) について，
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left\{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\cancel{\dot{y}^2})-\cancel{mgy}\right\}$$
定数扱い
$$=\frac{1}{2}m\cdot 2\dot{x}=m\dot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\cancel{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy}\right\}=0$$
すべて定数扱い

以上を(c)に代入すると，

$\dfrac{d}{dt}(m\dot{x})-0=0$ より，$m\ddot{x}=0$ となって，(a)と同じ式が導ける。

(ii) について，
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\left\{\frac{1}{2}m(\cancel{\dot{x}^2}+\dot{y}^2)-\cancel{mgy}\right\}$$
定数扱い
$$=\frac{1}{2}m\cdot 2\dot{y}=m\dot{y}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial y}\left\{\cancel{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}-mgy\right\}=-mg$$
定数扱い

以上を $\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}}_{m\dot{y}}\right)-\underbrace{\frac{\partial L}{\partial y}}_{-mg}=0$ ……(d) に代入すると，

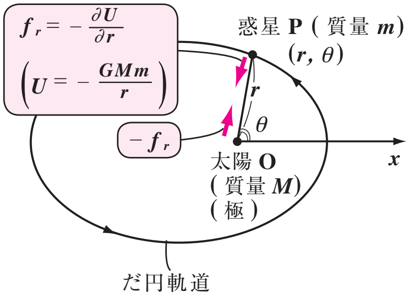
$\frac{d}{dt}(m\dot{y})-(-mg)=0$ より，$m\ddot{y}+mg=0$

よって，$m\ddot{y}=-mg$ となって，(b)と同じ方程式が導けるんだね。だんだん，ラグランジュの運動方程式にも慣れてこられたと思う。

● 惑星運動についても調べてみよう！

では最後に，惑星の運動についても調べてみよう。図 **3** に示すように，質量 M の太陽を **O**，質量 m の惑星を **P** とおき，**O** を極にして始線 **O**x を設定すると，惑星 **P** の位置は，極座標 **P**(r,θ) で表せるんだね。

図 **3** 万有引力の法則



極座標表示の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，

これを，覚えるのがメンドウなんだね。

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ① \qquad \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta} \end{bmatrix} \cdots\cdots ②$$

となることは，**P28**，**P127** で既に解説した。

そして，この惑星 **P** に働く力は，r 方向の万有引力 $f_r=-G\frac{Mm}{r^2}$ だけなので，惑星 **P** のニュートンの運動方程式は，次のようになるね。

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-G\dfrac{Mm}{r^2} \quad \cdots\cdots ③ \longleftarrow \boxed{r\text{ 方向：}ma_r=f_r} \\ m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \longleftarrow \boxed{\theta\text{ 方向：}ma_\theta=0} \end{cases}$$

そして，これは質点 **P** の **2** 次元平面内の運動なので，当然自由度 f は，

$f=2$ となるんだね。

では，この場合についても，ラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad \cdots\cdots(*2)\ (i=1,\ \underset{\text{自由度 } f=2}{\underline{2}})$$

で調べてみよう。今回の一般化座標とその時間微分の 4 つの独立変数は，$q_1=r$，$q_2=\theta$，$\dot{q}_1=\dot{r}$，$\dot{q}_2=\dot{\theta}$ なんだけれど，今回も，r，θ，$\dot{r}$，$\dot{\theta}$ の形で表すことにすると，まず，ラグランジアン $L=K-U$ の K と U は，

$$\begin{cases}\text{運動エネルギー } K=\dfrac{1}{2}m\left(v_r{}^2+v_\theta{}^2\right)=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)\\ \text{ポテンシャルエネルギー } U=-\dfrac{GMm}{r}\end{cases}$$

万有引力のポテンシャル (P83)

よって，ラグランジアン L は

$$L=K-U=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{GMm}{r} \quad \cdots\cdots⑤$$ となるんだね。

そして，ラグランジュの運動方程式は，$f=2$ より，次の 2 つだ。

$$\begin{cases}(\text{i})\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial r}=0 \quad \cdots\cdots⑥ \quad \leftarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=0 \text{ のこと}\\ (\text{ii})\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0 \quad \cdots\cdots⑦ \quad \leftarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_2}=0 \text{ のこと}\end{cases}$$

(i) について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left\{\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\cancel{r^2\dot{\theta}^2}\right)+\cancel{\frac{GMm}{r}}\right\}=\frac{1}{2}m\cdot 2\dot{r}=m\dot{r}$$

定数扱い

$$\frac{\partial L}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{2}m\left(\cancel{\dot{r}^2}+r^2\dot{\theta}^2\right)+GMm\cdot\frac{1}{r}\right\}$$

定数扱い

$$=\frac{1}{2}m\cdot 2r\cdot\dot{\theta}^2-\frac{GMm}{r^2}=mr\dot{\theta}^2-\frac{GMm}{r^2}$$

以上を⑥に代入して，

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r})-\left\{mr\dot{\theta}^2-\frac{GMm}{r^2}\right\}=0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{r^2} = 0$$ より，

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2}$$ となって，

$ma_r = f_r$ ……③と同じ方程式が導けるんだね。(P254)

$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}$ ……⑤

(ⅱ) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ …………⑦

(ⅱ)について，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{定数扱い}}m(\underbrace{\dot{r}^2}_{\text{定数扱い}} + \underbrace{r^2}_{\text{定数扱い}}\dot{\theta}^2) + \underbrace{\cancel{\frac{GMm}{r}}}_{\text{定数扱い}}\right\} = \frac{1}{2}m\cdot r^2\cdot 2\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\underbrace{\cancel{\left\{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}\right\}}}_{\text{すべて定数扱い}} = 0$$

以上を⑦に代入して，

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = 0 \qquad \underbrace{m}_{\text{定数}}\underbrace{\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}_{2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}} = 0$$ より，

$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0$　　両辺を $r\ (>0)$ で割って，

$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$　となり，

$ma_\theta = 0$　……④　と同じ方程式が導けた！(P254)　面白かった？

このように，極座標表示のニュートンの運動方程式では，

速度 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix}$ までは簡単に覚えられても，加速度

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{bmatrix}$ を覚えるのがメンドウだったんだね。でも，

ラグランジュの運動方程式では，$\boldsymbol{v}$ の知識のみで，$\boldsymbol{a}$ の知識がなくても，

$K = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2)$ で使った。

ニュートンの運動方程式：

$$\begin{cases} ma_r = f_r & \text{……③} \\ ma_\theta = 0 & \text{……④} \end{cases}$$ を導くことができるんだね。

さらに，xy 座標系における放物運動のラグランジュの運動方程式と，

極座標表示の惑星運動のラグランジュの運動方程式とが，まったく同じ形の方程式であることにも気を付けよう。今回は，簡単な例のみだったので，一般化座標とその時間微分 q_1，q_2，…，q_f，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_f$ を独立変数として用いずに x，y，$\dot{x}$，$\dot{y}$ や r，θ，$\dot{r}$，$\dot{\theta}$ の形のままで表したけれど，これを一般化座標とその時間微分を用いると，xy 座標系でも，極座標系でも，…，その他の座標系でも，まったく同じ形のラグランジュの運動方程式で，様々な運動を記述できることになるんだね。これこそが，解析力学がニュートン力学よりも，数学的により洗練された力学と言われる所以なんだね。

ここでは，解析力学入門ということで，ラグランジュの運動方程式に話をしぼって解析力学の本当の初歩的な解説をしたに過ぎないんだけれど，少しは興味をもって頂けただろうか？実は，この解析力学で用いられるすぐれた数学的手法は，統計力学や流体力学，そして量子力学においても重要な役割を演じることになるんだね。

したがって，さらに力学を極めたい方には，**「解析力学キャンパス・ゼミ」(マセマ)** で学習されることをお勧めする。これによって，さらに奥深くて面白い力学の世界を堪能して頂けると思う。