◆◆ 補充問題（additional questions）◆◆

補充問題 1	微分方程式（Ⅰ）	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

次の変数分離形の微分方程式を，各条件の下で解け。

(1) $y' = -\dfrac{x}{2y}$ ……………① $(y \neq 0)$ （条件：$x = 0$ のとき，$y = 1$）

(2) $y' = y\sin^2 x \cos x$ ……② $(y \neq 0)$ （条件：$x = 0$ のとき，$y = 2$）

レクチャー 微分方程式とは，x や y や y' などが入った方程式のことで，これをみたす関数 $y = f(x)$ や x と y の関係式を求めればよい。その際，積分定数 C が残る形の解を一般解という。これに対して，条件により，x と y の値の組が与えられると，C の値が決まる。この解を特殊解という。微分方程式には，様々なタイプのものがあるんだけれど，その中で最もシンプルなものが，次に示す変数分離形（へんすうぶんりけい）の微分方程式だ。ここでは，その解法も一緒に覚えよう。

変数分離形の微分方程式：$y' = \dfrac{g(x)}{f(y)}$ ……① が与えられた場合

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{f(y)}$ より，$f(y)\cdot dy = g(x)\cdot dx$ となる。この両辺を不定積分して，

（y の式）$\cdot dy$ =（x の式）$\cdot dx$ のように，左右は y だけ，x だけの式となって，変数が分離されていることが分かるはずだ。

$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$ となる。これから，一般解を求めればいいんだね。

解答＆解説

(1) $y' = -\dfrac{x}{2y}$ ……① $(y \neq 0)$ （条件：$x = 0$ のとき $y = 1$）を変形して，

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{2y}$ より，$2y\cdot dy = -x\cdot dx$ ← 変数分離形：（y の式）dy =（x の式）dx になった！

この両辺を不定積分して，

$$\int 2y\cdot dy = -\int x\cdot dx$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$ ← 2 つの不定積分から 2 つの積分定数が出来るが，これをまとめて 1 つにした C を右辺に示した。

よって，①の微分方程式の一般解は，$\dfrac{x^2}{2}+y^2=C$ ……③ となる。

ここで，条件より，$x=0$，$y=1$ を③に代入すると，

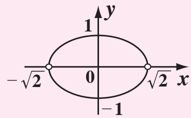
$\cancel{\dfrac{0^2}{2}}+1^2=C$ より，$C=1$

これを③に代入して，①の特殊解は，

$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ $(y \neq 0)$

となる。……………………………(答)

この解は，だ円：$\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$ を表しているんだね。



（ただし，$(\pm\sqrt{2},\ 0)$ を除く。）

(2) $y'=y\sin^2x\cdot\cos x$ ……② $(y \neq 0)$（条件：$x=0$ のとき $y=2$）を変形して，

$\dfrac{dy}{dx}=y\cdot\sin^2x\cdot\cos x$ より，$\dfrac{1}{y}dy=\sin^2x\cos x\,dx$

変数分離形
$(y$ の式$)dy=(x$ の式$)dx$

この両辺を不定積分して，

$$\underbrace{\int\frac{1}{y}dy}_{\log|y|}=\underbrace{\int\sin^2x\cdot\cos x\,dx}$$

$\int f^2\cdot f'dx=\dfrac{1}{3}f^3+C$ より，これは，$\dfrac{1}{3}\sin^3x+C$ となる。

$\log|y|=\dfrac{1}{3}\sin^3x+C_1$ $(C_1$：積分定数$)$

$|y|=e^{\frac{1}{3}\sin^3x+C_1}=e^{C_1}\cdot e^{\frac{1}{3}\sin^3x}$

$\log_e a=b$
$\uparrow\downarrow$
$a=e^b$

$y=\underbrace{\pm e^{C_1}}\cdot e^{\frac{1}{3}\sin^3x}$ より，②の一般解は，

これを新たな定数 C とおく。

$y=C\cdot e^{\frac{1}{3}\sin^3x}$ ……④ $(C=\pm e^{C_1})$ となる。ここで，

条件：$x=0$，$y=2$ を④に代入すると，

$2=C\cdot e^{\frac{1}{3}\sin^3 0}=C\cdot\underbrace{e^0}_{1}$ $\therefore C=2$ となる。

これを，④に代入して，②の特殊解は，

$y=2e^{\frac{1}{3}\sin^3x}$ となる。…………………………………………………(答)