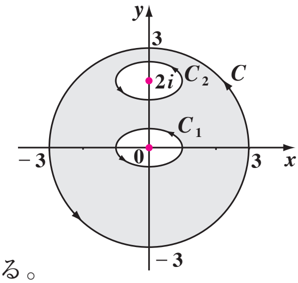
演習問題 15　● コーシーの積分定理・グルサの定理 ●

コーシーの積分定理・グルサの定理を用いて，積分路 $C：|z|=3$（反時計まわり）について，$\displaystyle\oint_C \frac{z+i}{z^2\cdot(z-2i)^3}dz$ の積分値を求めよ。

ヒント！ 被積分関数の正則でない 2 点 $z=0$ と $2i$ を C は囲むので，C 内でこれらを囲むさらに小さな単純閉曲線 C_1 と C_2 を設けて，コーシーの積分定理により，$\displaystyle\oint=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}$ として計算する。この際，$\displaystyle\oint_{C_1}$，$\displaystyle\oint_{C_2}$ 共にグルサの定理を利用しよう。

解答＆解説



被積分関数の正則でない 2 点 $z=0$ と $2i$ は共に積分路 C の内側にある。よって，右図に示すように，C 内にあってこれら 2 点をそれぞれ囲む互いに重ならない単純閉曲線 C_1 と C_2 を考えると，求める 1 周線積分は，コーシーの積分定理により，次のように求められる。

$$\oint_C \frac{z+i}{z^2\cdot(z-2i)^3}dz=\underbrace{\oint_{C_1}\overbrace{\boxed{\frac{z+i}{(z-2i)^3}}}^{f(z)}\frac{1}{z^2}dz}_{=\frac{2\pi i}{1!}\cdot f'(0)}+\underbrace{\oint_{C_2}\overbrace{\boxed{\frac{z+i}{z^2}}}^{g(z)}\frac{1}{(z-2i)^3}dz}_{=\frac{2\pi i}{2!}\cdot g''(2i)\ \leftarrow\text{グルサの定理}}\quad\cdots\cdots①$$

(i) $\displaystyle\oint_{C_1}$ について，$f(z)=\dfrac{z+i}{(z-2i)^3}$ とおくと，$f(z)$ は C_1 とその内部で正則である。よって，

$$f'(z)=\frac{1\cdot(z-2i)^3-(z+i)\cdot 3(z-2i)^2}{(z-2i)^6}=\frac{z-2i-3(z+i)}{(z-2i)^4}$$

$$=\frac{-2z-5i}{(z-2i)^4}=-\frac{2z+5i}{(z-2i)^4}$$ より，グルサの定理を用いて，

$$\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\cdot f'(0)=2\pi i\cdot(-1)\cdot\frac{5i}{(-2i)^4}=-2\pi i\cdot\frac{5i}{16\cancel{i^4}}$$

$$=-\frac{10\pi i^2}{16}=\frac{5}{8}\pi \quad \cdots\cdots ②$$ となる。

(ii) $\oint_{C_2}$ について，$g(z)=\dfrac{z+i}{z^2}$ とおくと，$g(z)$ は C_2 とその内部で正則である。

よって，

$$g'(z)=\frac{1\cdot z^2-(z+i)\cdot 2z}{z^4}=\frac{z-2(z+i)}{z^3}=\frac{-z-2i}{z^3}=-\frac{z+2i}{z^3}$$

$$g''(z)=\left(-\frac{z+2i}{z^3}\right)'=-\frac{1\cdot z^3-(z+2i)\cdot 3z^2}{z^6}$$

$$=-\frac{z-3(z+2i)}{z^4}=-\frac{-2z-6i}{z^4}=\frac{2(z+3i)}{z^4}$$ より，

グルサの定理を用いると，

$$\oint_{C_2}\frac{g(z)}{(z-2i)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\cdot g''(2i)$$

$$=\pi i\cdot\frac{2\cdot(2i+3i)}{(2i)^4}=\frac{\pi i\cdot 10i}{16\cdot\cancel{i^4}}$$

$$=-\frac{5}{8}\pi \quad \cdots\cdots ③$$ となる。

以上 (i)(ii) より，②，③を①に代入すると，求める 1 周積分の値は，

$$\oint_C\frac{z+i}{z^2\cdot(z-2i)^3}dz=\underbrace{\frac{5}{8}\pi}_{②より}-\underbrace{\frac{5}{8}\pi}_{③より}=0$$ となる。 ……………………………………(答)